绪　论

0.1　数学的研究对象问题

数学的研究对象（即数学的定义）是数学哲学重要问题之一，这个问题既简单又不容易回答。说简单，因为在一般人的心目中都有自己所理解的数学，似乎无须给予定义。说不容易回答，因为要准确地回答并得到公认，似乎还没有人能够真正做到。

在科学史上，不仅不同历史时期的哲学家、数学家对这一问题的理解不尽相同，就是在同一历史时期的哲学家、数学家的理解也不尽相同。R.E.摩利茨的《数学家语录》（1914）曾收集了数以百计的历代著名数学家关于数学定义以及对数学性质的论述。M.C.阿克彼洛夫在《现代数学的内容和对象问题》①（1976）一书中也列举了十多种现代流行的数学定义。数学定义如此之多，以致有人说有多少个数学家就有多少种数学定义。数学定义的众说纷纭，说明人们数学观的混乱。也有人认为，即使在今天，高度发展的数学仍处在发展初期，并未定型，其前途是无限的。我国一位数学家感叹地说："要想对这个问题（指数学研究的对象）给出人人都满意的回答几乎是不可能的。"②

其实这一点早已被人们认识到了。比如17世纪时，法国数学

---

① 该书节译见《世界科学》1983年第1期，第16页。

② 孙小礼、楼格主编：《人·自然·社会》，北京大学出版社1988年版，第10页。

界三巨头之一的B.帕斯卡在他的《思维——雄辩的艺术》一书中曾说："本身已如此一目了然，以致没有任何词汇能把它解说得更清楚的事物，绝不要试图给它下定义。……以免被所使用的含混不清的词汇所欺骗。"①数学对象问题就是这样的问题。

下面，我们循着历史的足迹，综述自古迄今关于数学定义的主要观点。

古希腊的毕达哥拉斯把"数"看成万物的本原，自然"数"也是数学的本原，是数学的研究对象，而所谓的"数"是先验的。柏拉图把数学看成是"心智的产物"，而且属于他的"理念世界"，认为数学也是先验的。

亚里士多德反对柏拉图的先验论，认为数学只研究存在的一部分属性，这部分属性就是存在物的量性和连续性。他说，数学家开始研究之前，先剥去一切可感的质，例如，轻重、软硬、冷热等等，只留下量性和连续性，而不考虑其它方面的属性。他在《范畴篇》中把数量（Quantity）区分为离散的和连续的两种，并说"数是一种离散的数量"，"线是一种连续的数量"。在作了如此区分之后，他指出，研究数及其属性（例如奇偶性、对称性以及比例关系等）的学科叫做算术，研究量及其属性（例如对称、相交、平行等）的学科叫做几何学。因为这两门学科的对象具有某些共同的性质，所以归结为一门学科：数学。所以数学是研究数量的科学。这是一个天才的定义，一直到19世纪末期，仍被多数哲学家和数学家所接受。例如，17世纪的笛卡尔就这样认为，他说："所有那些目的在于研究顺序和度量的科学，都和数学有关。至于所求的度量是关于数的呢，形的呢，星体的呢，声音的呢，还是其它东西的呢，都是无关紧要的。因此，应该有一门普遍的科学，去解释所有我们能够知道的顺序和度量，

---

① 转引自《自然辩证法研究》1988年第2期，第8页。

而不考虑他们在个别科学中的应用。事实上，通过长期使用，这门科学已经有了它自身的专名，这就是数学。”①可见，笛卡尔也认为数学是数量的科学，这同亚里士多德的思想一致。所不同的是，他把数、量分别解释为“顺序”和“度量”。

数学史表明，在19世纪以前，古典数学的主要成就是算术、几何学、代数学和微积分。这些数学所研究的都是客观事物的形式和数量。对此，恩格斯曾经概括为：“纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系”②；他还说，数学是“一种研究思想事物（虽然它们是现实的摹写）的抽象的科学”③。恩格斯的这些论述划清了数学同自然科学的界限，坚持了唯物主义路线，又优于亚里士多德的定义，因而受到数学家普遍的赞成，今天仍被经常引用。

在19世纪以前，虽然数学中已经有了没有直观背景的虚数，但它在整个数学中毕竟不占主导地位，所以虚数对恩格斯的数学定义并没有产生冲击。然而自19世纪以来，纯数学的三个基本部门——分析学、几何学、代数学均发生了质的变化：分析学已由古典微积分发展出函数论、泛函分析；几何学已由欧几里得几何学发展出非欧几里得几何学、多维几何学；代数学已由代数方程论发展出抽象代数。其中的复变数函数论、非欧几何学、多维几何学以及抽象代数等这些重要的新的数学领域，开始都没有直观的背景。在数学获得巨大成就的情况下，数学的对象到底是什么，又引起人们思考。

逻辑主义者把数学等同于逻辑，因此逻辑的对象自然就成了数学的对象。逻辑主义的代表人罗素明确地说，逻辑和数学“二

---

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，上海科学技术出版社1979年版，第6页。

② 恩格斯：《反杜林论》，人民出版社1970年版，第35页。

③ 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第192页。

者也确是一门科学，它们的不同就像儿童与成人的不同：逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代”①。因此，在逻辑主义者看来，不管数学的内容如何，也不管它的内容能否反映客观实际，只要求符合逻辑。在这种思想的指导下，罗素才说：“数学可以定义为一种科目，在其中我们决不知道说的是什么，也不知道所说的是真还是假。”②直觉主义主要从自然数的实在性出发，构造各种数学概念，至于这些数学概念有无实际意义他们并不关心。他们从这一认识出发，把数学定义为“纯粹心智的构造”，构造的目的是为了发展他们的直觉主义的数学。纯粹的形式主义者则认为数学就是一串没有实际内容的且在逻辑上又不互相矛盾的符号。1899年，希尔伯特的《几何学基础》一书出版，标志现代公理法的诞生。从此，数学开始了公理化的趋势，并产生了约定主义。约定主义者认为，不同的数学分支是从不同的公理推导出来的，而公理则是一组“公约”或“约定”的命题。这些不同的数学学派，在本世纪开始的三分之一世纪里，在数学对象这一问题上展开激烈的争论，互相批判，没有、也不可能取得一致的意见。

原苏联数学界主要坚持了恩格斯的定义，但对其作了符合本世纪以来数学发展状况的解释，其中代表性的观点是：“数学以纯粹形态的量的关系和形式作为自己的研究对象。”③

美国著名数学家R.柯朗与H.罗宾斯合著的有影响的《数学是什么》（1941）一书开头，给数学下了一个定义：“数学，作为人类智慧的一种表达形式，反映生动活泼的意念，深入细致的思考，以及完美和谐的愿望。它的基础是逻辑和直觉，分析和推

① 罗素：《数理哲学导论》，商务印书馆1982年版，第182页。

② 参见梁宗巨：《世界数学史简编》，辽宁人民出版社1980年版，第6页。

③ A.Д.亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》第1卷，科学普及出版社1958年版，第72页。

理，共性和个性。"①他们还说："对于学者，同样对于普通人，只有依靠数学自身经验，而不是依靠哲学，才能回答下述问题：数学是什么？"②因为他们认为，如果坚持一定的哲学信念，必然妨碍数学获得新的成就。柯朗等把数学看成超越任何哲学的观点是不可能的。

在我国，1949年以前，罗素关于数学的定义有相当大的影响。1949年以后，马克思主义在中国得到大力的宣传，人们为了坚持恩格斯的定义，基本上采取当时苏联学者的态度——对恩格斯的定义作了符合当前数学状况的解释或者作一些必要的文字改动。

本世纪30年代以来，法国兴起了一个布尔巴基学派。该学派从当前已有的数学成就出发，寻找出三个主要的"结构"——序结构、代数结构和拓扑结构，并用这三个结构重新整理了数学。所以他们把数学定义为"研究结构的科学"。这个观点反映了现代数学水平，获得了许多人的赞同，也是当前国际上有影响的一种观点。

布尔巴基学派关于数学对象的观点在我国也受到普遍的重视。但是这一观点也不是无懈可击的。首先，"结构"概念不易被人理解，也容易同物质结构、化学结构和逻辑结构等相混淆，仅限于职业数学家的圈子，可接受性不高。其次，"结构"概念虽然反映了现代数学水平，但并不比"量"的概念更普遍、更抽象。按恩格斯的观点，"结构"仍属"量"的范畴。第三，把数学定义为研究结构的科学，属于对现有数学所作的逻辑分析，是解释型的定义。今后数学的发展，一旦突破结构思想，则这一定义将失效。

① R.柯朗、H.罗宾斯：《数学是什么》，湖南教育出版社1985年版，第1页。
② 同上书，第5页。

我国数学家丁石孙在研究了当代流行的定义后提出："数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系。"①他解释说："数学对象有两重性：作为科学理论，数学的研究对象是各种各样的逻辑可能的关系；而作为一门科学，数学的研究对象则是客观世界。"②

1939年12月，英国数学家、哲学家怀特海在一篇题为《数学与善》的著名报告中，提出了"数学是在从模式化的个体作抽象的过程中对模式(pottern)进行研究"的思想。对于数学模式，我国数学哲学家徐利治、郑毓信指出：它是具有真实背景的抽象物，也是创造性思维的产物，一旦得到了明确的构造，就获得相对独立性，成为数学的研究对象，就像奕棋，棋规既定，棋谱就成为研究对象一样。他们认为，数学模式概念可以作广义量的范畴，于是他们提出，"数学是研究广义的量（即模式结构形式）的学科"。③

1957年，我国数学家关肇直曾经提出："数学是研究现实世界中量的关系的科学。"④ 80年代，这一观点得普遍的重视。比如,《中国自然辩证法大百科全书》中"数学哲学"条目的作者就重新论证了这一观点，认为"数学是研究量的科学"。其中的量就是马克思主义哲学中同质相对立的概念，具有确定的含义。这一观点，既适用于19世纪以前的数学，又适用于19世纪以来的数学；既通俗，又深刻，得到国内许多学者的赞同。

马克思主义哲学认为，客观世界中的任何事物都是质与量的对立统一，无量的"纯质"和无质的"纯量"都是不可想象的。

---

① 孙小礼、楼格主编：《人·自然·社会》，第16页。

② 同上书，第18页。

③ 徐利治、郑毓信：《略论数学真理及真理性程度》，载《自然辩证法研究》1988年第1期。

④ 关肇直：《论数学的对象》，载《自然辩证法研究通讯》1957年第2期。

因此，纯数学不是毫无客观内容的“自由创造”，它的存在也不可能是独立的客观存在，而只能是以抽象的方式存在。由于客观事物在不断地发展，所以同质不可分离的量也在不断地发展，从而研究量的数学不能不发展。只有今天还有没有被研究的量，没有永远不能研究的量。数学就是从量的侧面研究客观世界的一门学科。

随着人类认识的发展，人们对量的认识逐步深入，反映了人们对量的认识的层次性。本书谈到数学历史的分期，就是以量的层次性的认识为依据的。

0.2 数学的特征及在科学中的地位

1.数学的若干特征

数学的研究对象决定了它有抽象性、严格性、系统地使用符号和广泛的应用等特征。这些特征是数学区别于其它科学的重要标志。

抽象性在极简单的数学知识中就已表现出来。我们平时写出任一个数，比如5，它既不是一只手的手指头，也不是任何5件具体的东西，而是一个抽象的概念。同样，几何中的点不是画图的铅笔尖，直线不是拉紧的绳子，它们也是抽象的概念。当然，抽象性并非数学所独有，数学的抽象性首先在于独特的抽象内容，即数学“为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边”，而“以极度抽象的形式出现”。① 其次是高度的抽象，即从已有的概念引出新的概念，在抽象之上再进行抽象，并反复进行，因而才有今天高度抽象的数学。

① 恩格斯：《反杜林论》，第35页。

逻辑的严格性是公认的数学重要特征之一。如果说"任何科学都是应用逻辑"（列宁语），则数学是应用逻辑的典型学科。谁都知道，一个数学命题能否成立，并不取决于实验证明，而是取决于严格的逻辑证明。

严格的逻辑证明又为它带来两个显著特征：**结构的阶梯形**和**结论的确定性**。前者指它的结构犹如阶梯，一层一层逐级往上，步步为营，稳扎稳打。后者包含三个思想：其一，它的结论令人信服，是"信得过的"；其二，它的结论一是一，二是二，可谓"说一不二"，对错分明，界限清楚；其三，它的结论不因数学发展而过时，可谓"永葆青春"。

系统地使用符号是数学又一特征。这是因为：第一，数学免不了要计算，不仅需要计算的工具（如纸、笔、计算器等），而且还得有符号，否则无法进行，所以符号是计算的需要。第二，符号也是逻辑推理的需要。数学符号是抽象的数学概念的具体化身，是数量关系的无声名称，是逻辑推理的物质承担者。第三，形式化是现代数学的重要特征，而使用符号是数学形式简化的最好途径。数学史表明，有没有优越的符号，是数学发达程度的标志之一，尤其现代的纯数学，离开符号是不可想象的。

广泛的应用性是高度抽象的逻辑结果，也是由它的对象决定的。因为客观事物都是质与量的统一体，因此，作为研究量的数学就"无孔不入"，它的应用必然渗透于客观世界的一切方面，贯穿于一切科学领域。现代科学数学化趋势的出现以及数学作为横断学科地位的加强，是数学应用广泛的最好说明。

现在不少数学家认为，**数学美**也是数学重要特征之一。上述数学诸特征均属数学美的范畴。数学的发展和人类文明的进步，数学美的概念虽有某些演变，但综观古今数学，无论是它的理论和方法，还是它的内容和形式，数学美的基本内容还是相对稳定的，这就是：简洁性、对称性、和谐性和奇异性等等。数学美是

美的组成部分。“如果说自然美和艺术美是由视觉、听觉等感官所接受的美感，数学美则是大脑思考所产生的思想结构上的精神美。”① 人们对数学美的追求也是数学发展动力之一。

2.数学在科学中的地位

数学在科学中的地位包括两个方面：数学在科学发展中的地位（即数学对科学发展的作用）和数学在科学分类中的地位。随着科学的发展，数学在科学中的地位也几经变化。

在古希腊，科学没有分化，那时的思想家、科学家几乎都是数学家。当时，尽管已有天文学、力学、物理学等名称，但相对来说都没有数学成熟。古希腊的思想家研究数学的根本目的不是为了实际应用，主要为了解释世界（比如，毕达哥达斯学派和柏拉图学派都奉行数学化了的哲学）。除数学外的其它学科，在很大的程度上都是作为数学的分支或具体应用的面貌出现的。例如：天文学把天体看成“点”，用观测到的数据建立天体的几何模型；光学是几何学的应用；音乐和声学是算术的应用，等等。几乎可以说数学是当时科学的同义语，是当时最成熟的学科。

欧洲中世纪，是经院哲学盛行的年代，也是科学的形象受到扭曲的年代，但是数学仍被有识之士所重视。例如，R.培根曾针对经院哲学家的无知提出了数学是整个科学的大门和钥匙以及数学是所有科学支柱的见解。

经过中世纪漫长黑夜之后，欧洲迎来了文艺复兴时期。随着文艺复兴运动的发展，宗教神学的桎梏被打破，经院哲学被抛弃，被经院哲学树立起来的古代权威也被怀疑。这时，人们虽然对古代思想产生了一种怀疑主义思潮，但是对古希腊建立起来的数学却给予了奇迹般的尊重。正如美国数学史家M.克莱因所说：“在各种哲学系统纷纷瓦解，神学上的信念受人怀疑以及伦理道

① 张奠宙：《关于数学文化的一点思考》，载1989年9月9日《科学报》。

德变化无常的情况下，数学是唯一被大家公认的真理体系。数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥的立足点；人们又把寻求真理的努力引向数学。”① 数学为什么能受到大家的青睐呢？因为在中世纪，圣经是一切知识的源泉，而文艺复兴运动推翻了神权，把人的注意力引向研究自然。研究自然就少不了数学。虽然这时各门科学平行而又独立地发展，但同数学还是紧密地结合的，例如16、17世纪时很难找到一位纯粹的数学家。这时的数学，不仅仍是最成熟的学科，而且还是**带头的学科**。当时比较成熟的科学都是直接应用数学的结果，比如，哥白尼、开普勒的天文学，伽利略、牛顿的力学等都是应用数学的结果。牛顿庞大的科学体系就是以《自然哲学的数学原理》命名的，该书的体系也是以他的微积分为工具建立起来的。伽利略从他的工作中认识到数学的重要性。他认为，宇宙是一部巨著，其中的内容是自然科学，它的语言是数学，符号是几何图形，所以如果不掌握数学就无法读懂它，他说：“没有它们（指数学——引者注），人们就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着。”② 笛卡尔是数学演绎法的倡导者，他宣称科学的本质是数学，并深信从不可怀疑的公理出发，就可把一切自然知识推演出来。显然，笛卡尔过分夸大了数学的作用，但是他对数学方法的普遍意义的认识是合理的。

18世纪，主要是自然科学收集材料、积累材料的时期，在此基础上出现了瑞典著名自然科学家林耐关于自然科学的分类法，产生了“百科全书式的概括”（恩格斯语）。法国百科全书派代表之一达兰贝尔认为，数学同其它自然科学一样，产生于实际需

---

① M.克莱因：《古今数学思想》第1册，上海科学技术出版社1979年版，第251页。

② 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第33页。

要（如测量土地和数字计算）；当产生后，又随天文学、力学、物理学等学科的发展而发展。所以他明确地确定**数学是自然科学的一个门类**。

19世纪，“自然科学本质上是**整理材料的**科学，关于过程、关于这些事物的发生和发展以及关于把这些自然过程结合为一个伟大整体的联系的科学”①。数学同其它自然科学之间有何联系呢？法国的数学家、天文学家拉普拉斯继承了笛卡尔和伽利略的思想，提出了**数学是自然科学的工具**的思想，为科学界普遍重视。稍后，法国哲学家、社会学家孔德从所谓的“全科教育”观点出发，把科学依次分为数学、力学、天文学、物理学、化学、生理学和社会学，并认为要学习排在后面的某一学科，必须先学习排在其前面的所有学科。这种观点虽然过于机械、简单，但是在数学作为学习其它科学的工具这一点上是合理的。

我国著名教育家蔡元培先生在任北京大学校长期间，对原来体制进行改革，推行“废科设系”，即废除文理两科的界限，将两科分属的14个专业改为14个系，并以数学系为第一系。他说：“大学宗旨，凡治哲学文学及应用学科者，都要从纯科学入手，治纯科学者，都要从数学入手，所以各系顺序，列数学为第一系。”②蔡元培的文理渗透以及把数学作为各门学科的基础的思想是深刻的。

从19世纪末期开始，随着数学三个基本部门的发展，人们对数学的认识又有了发展。这时期的数学，在内容上主要不是社会实践中所提出的问题，也不同于以某种运动形式为对象的自然科学；在方法论上主要是依赖演绎法建立它的体系；检验它的真理

① 恩格斯：《路德维希·费尔巴哈和德国古典哲学的终结》，人民出版社1972年版，第36页。

② 转引自孙小礼：《蔡元培的“沟通文理”思想》，载1986年2月28日《光明日报》。

标准除依靠社会实践外，还依赖逻辑论证和文化价值。于是18世纪达兰贝尔将数学作为自然科学一个门类的思想有了重大突破——将数学与整个自然科学放在同等地位，即把**数学与自然科学并列**。在我国，最早出现这一提法的是1956年制定的《自然辩证法十二年（1956～1967）研究规划草案》。从这时开始，一般提法是“数学与自然科学”，犹如说“哲学与社会科学”一样。

马克思曾经指出：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算真正达到完善地步。”① 本世纪以来科学的发展表明，科学数学化的趋势越来越明显。今天的数学不仅应用于各门自然科学，还广泛应用于各种社会科学。几乎可以说，只有今天还有没有用到数学的学科，没有永远不能应用数学的学科。因此，数学应当作为**横断学科**。

最近几年，数学作为文化的思想已引起国内外普遍的重视。有的学者认为，数学不仅是人类文化的组成部分，而且还是各文化的基本文化②。上节曾提到，有的学者认为数学的对象有两重性。同这种两重性相对应，数学的价值也有两重性：一为实用价值，即数学作为科学，必须为社会实践服务；一为文化价值，即数学作为理论，人们有对数学美的追求和精神上的满足。在历史上，数学的发展同人类的精神文化的发展同步，数学水平往往是一个国家和民族文化素质和智力水平的量度，也是衡量这些国家和民族的经济和科学技术水平的重要尺度之一。在以计算机为标志的信息时代，数学的发展是一切科学技术发展的基础，所以，数学教育也是现代各国教育的重要内容之一。人们认为，数学教育在传授、积累数学知识，以及作为其它科学技术的工具方面固然重要，但是对于培养人的思维能力、开发人的智力、提高人的

---

① 参见保尔·拉法格等：《忆马克思、恩格斯》，三联书店1963年版，第8页。

② 参见胡世华：《信息时代的数学》，载《数学与文化》，北京大学出版社1990年版，第269页。

文化素质也很重要。

0.3 数学发展的几个重要阶段及其主要特征

现代数学既不是某一个民族或某一地区的产物，也不是某一个历史时期的产物，而是在许多民族和地区世世代代的生产斗争和科学实践中逐渐形成、发展而成的。它的发展，既有比较缓慢的量的积累，也有重大的质的突破；既有渐进性，也有阶段性。国内数学界一般认为，从远古到现在，数学发展经历了四个重要阶段。

1.数学萌芽时期（公元前6世纪以前）

从远古到公元前 6 世纪，是数学的萌芽时期。在人类社会的历史上，这是原始社会和奴隶社会的初期。这个时期的数学成就主要出现在巴比仑、埃及和中国。

在这个时期内，由于实际计算的需要，人们逐渐形成了简单的自然数和分数概念，各民族都先后产生了自己原始的记数方法，也都积累了一些计算简单几何图形的面积和体积的几何知识。埃及在公元前1800年前已有等差级数和几何级数的计算，不仅有简单几何图形面积的计算方法，而且还有难度很大的计算正方形锥台体积的方法。在巴比仑，由于商业和债务的计算，已经有了乘法表、倒数表和平方表。在我国殷代的甲骨文中，不仅有从一到九的个位数字，也有成千上万的大数。至迟从殷代开始，由于农牧业计时的需要，我们的祖先已将“十干”和“十二支”配成六十甲子，用以记年、记月、记日，沿用至今。

在这一时期内，由于生产水平很低，商品生产极其有限，人们对数学的要求也不多，所以这个时期的数学知识，仅仅限于一些简单的、与人们切身经验有直接关系的感性知识，且是零散的

而不是系统的，有的公式是近似的，个别的方法还是错误的。

2.初等数学时期（公元前6世纪～17世纪初期）

约从公元前6世纪开始直到17世纪初期，是数学发展的初等数学时期，又称**常量数学**或**有限数学时期**。在人类社会的历史上，这是较发达的奴隶社会和整个封建社会时期。在这个时期内，西方数学发展的中心先在希腊，后在阿拉伯和印度，以后又转移到西欧。中国在14世纪以前，数学一直处于领先地位。在数学内容方面，西方在2世纪以前是几何学优先发展阶段，2世纪以后则是代数计算优先发展阶段。如果说古希腊的证明比较突出的话，那么中国的计算也很突出。

在古希腊，由于社会物质财富的增加，使当时奴隶主民主派中的一部分人可以不从事体力劳动而专门从事脑力劳动，因而使数学获得重大的发展。希腊的学者们从长期积累的丰富的数学材料中，发现了它们之间的联系，比如，发现了直角三角形三边长度之间的关系即勾股定理，发现了运用基本概念和命题作为逻辑推理前提的逻辑证明等。从此数学知识系统化了，产生了以欧几里得的《几何原本》为代表的数学著作。

随着希腊被罗马所灭亡（前1世纪），希腊数学逐渐衰落，数学发展的中心逐渐移到阿拉伯。在这个时期内，代数开始从几何中分化出来而成为独立的数学分支，已经有了一般二次方程的公式解法，有了以自然数作指数的二项定理。三角学也以独立的姿态出现。

西方在文艺复兴前后（15～17世纪）的一段时期内，是继希腊之后科学发展的第二个黄金时期。西欧各国在继承古希腊和阿拉伯数学成就的基础上取得许多重要成就。比如：代数学已经系统地使用符号；有了三次和四次方程的公式解法；“印度——阿拉伯数字”已经定型通用；不仅产生了十进小数，而且还产生了对数。

中国数学也在独立地发展。唐中期以前，产生了以《九章算术》为代表的《算经十书》。在这十部书中，已有勾股定理及其在测量上的广泛应用，有世界上最早的正负数运算法则，有典型的多元一次联立方程组的解法，也有极限思想在几何学中的应用等。宋元时期，是我国数学取得辉煌成就的时期，主要成就有：秦九韶等的剩余定理和高次方程的数值解法，贾宪和杨辉等的二项式系数表，李冶和朱世杰的天元术和四元术，朱世杰和沈括等的高阶等差级数求和等。我国春秋时代已有的筹算发展到元代进行了重大的改革，产生了今天仍有实用价值的算盘。

由此可见，在这个时期内，除虚数以外，初等数学基本上完备了。从经验知识到理论知识，从感性认识到理性认识以及由零散材料到系统知识，是这个时期的数学区别于萌芽时期的数学的主要特征。今天中学的数学内容，除解析几何外，都是这个时期形成的。

由于这时期人们的认识水平还不高，只能了解事物之间的固定的关系，还不能从运动、变化和发展中把握事物，所以这时期的数学，虽有极限思想及其初步运用，但是主要是以常量、有限和不变图形的研究为特征的初等数学。

3.近代数学时期（17世纪中期～19世纪末期）

从17世纪到19世纪末期的将近三个世纪的时间里，是西方资产阶级夺取政权、巩固政权以及资本主义的生产方式取得发展的时期，也是数学不断取得重大突破的时期，这是近代数学时期，又称变量数学或高等数学或无限数学时期。

17世纪的数学有如下几个特点：

（1）在古希腊，几何学是数学的同义语，代数以几何的面貌出现，代数问题往往依赖几何方法解决和论证，而从17世纪开始，由于笛卡尔解析几何的产生，出现了代数化的趋势——几何问题又常常依赖代数方法解决和论证。

（2）以解析几何的产生为标志，变量开始进入数学。牛顿和莱布尼茨微积分的产生，则是变量观点和方法的系统运用，从此开创了一门既非几何学，又非代数学的新领域——微积分。微积分的产生，也是数学家冲破传统的逻辑严格性的束缚，敢于相信力学、物理学，重视解决实际问题的精神的体现。

（3）费尔马、帕斯卡和惠更斯等的概率论的产生，使数学开始涉猎偶然事件。如果说以往的数学是研究确定性现象的数学的话，则概率论是研究非确定性现象的数学。

由于17世纪时数学有如此重大的成就，所以达兰贝尔和狄德罗认为，这个世纪是数学的世纪。

18世纪，工业革命在英国开始，以后遍及全欧洲，使生产力得到迅速提高；法国兴起的启蒙运动，又使人们的思想得到进一步解放。这些都为数学进一步发展提供了一定的条件。在18世纪，数学家除了为微积分的奠基工作继续努力外，并在微积分的基础上发展出无穷级数、常微分方程、偏微分方程以及变分法等学科；概率论这时由起初的组合概率时期开始进入分析概率时期。因此，18世纪是现代数学分析的形成时期。

19世纪是西方人才辈出的时代。仅就数学而言，既有集一切数学大成、在数学的各个领域中都放射出光芒的高斯、黎曼和彭加勒，也有别开生面、敢于创新，对数学作出重大突破的罗巴切夫斯基、伽罗瓦和康托尔，更有数学各个分支的杰出的代表人物，比如分析学家柯西、几何学家史特纳、代数学家凯雷等。这些数学家把数学推向新的高度。19世纪是西方继古希腊、文艺复兴之后，数学发展的第三个黄金时期。19世纪也是科学的世纪。

在19世纪，现代数学的三个基本部门——分析、几何、代数都有重大的突破。数学分析方面，除确立微积分的现代形式外，还建立起对以后有重要应用的复变函数论。罗巴切夫斯基等非欧几何的产生，动摇了传统的欧几里得几何是唯一的空间形式的先

验论断，使人们的空间观念发生重大的突破。以伽罗瓦的工作为标志的抽象代数的创立，使传统的代数运算的观念发生重大突破。19世纪是数学取得一系列重大突破的世纪。今天大学数学系的课程内容主要是这个世纪产生并形成的。

4.现代数学时期（19世纪末期以来）

从19世纪后期开始，数学发展又进入一个新的时期：现代数学时期。在这个时期内，科学技术领域发生了一系列震撼世界的重大事件，因此，本世纪被称之为科学技术革命的世纪。

科学革命发端于19世纪末期的物理学危机。作为这一危机的必然产物，是以相对论和量子力学的产生为标志的物理学革命。物理学革命改变了经典物理学中的物质观、时空观和运动观。从本世纪20年代开始，在其它科学技术领域也发生了许多重大的事件，这就是：原子能的利用、电子计算机的发明、空间技术的兴起、分子生物学的形成、以及激光技术、合成材料技术、农业新技术和高能物理。这些领域的产生和发展，改变了科学的面貌，深刻地影响着人类社会的各个方面。

本世纪以来的数学同其它的科学技术领域一样，在原有的基础上又有了巨大的发展，其速度之快、规模之大、抽象程度之高以及应用的广泛和深入等方面都远远超过了以往任何时期。

在本世纪80年代的报刊、杂志以及一些专著中，也常用“爆炸”二字来形容现代科学（包含数学）技术知识和文献的增长速度，不管“爆炸”二字是否确切，但是科技文献增长的速度越来越快，知识更新的周期越来越短却是事实。

在本世纪开始的第一年（1900年），在一次国际数学家大会上，德国著名数学家希尔伯特发表了著名演说。他在演说中提出了数学中23个带有全局性的问题。对这23个问题的研究，是推动本世纪数学发展的强大动力之一。在1976年的一次国际数学家大会上，集中了当今世界上25位一流的数学家，他们共同研究提出

了27个带有全局性的问题。这就是说，76年前一个人基本上能做的事现在却由25个人来做。是不是当代数学家的水平降低了呢？当然不是。现代数学家所研究的问题要比他们的先辈们所研究的问题高深得多。这说明，当代数学家只能通晓数学的一个分支或某一个方面。今天，不仅像古希腊的亚里士多德和17世纪的牛顿那样百科全书式的科学家不可能产生，不仅像18世纪的欧拉和19世纪上半期的高斯那样全能式的数学家不容易产生，而且像19、20世纪之交的彭加勒和希尔伯特这样能雄视数学全局的数学家也难于找到。

现代数学一般认为有如下几个主要特征，根据这些特征，也可称现代数学为**结构数学或抽象数学**。

（1）纯数学更加抽象，分支增多而又互相渗透。

现代大学所开设的数学课主要是：以微积分为中心的“高等数学”，以多项式理论和线性代数为基础的“高等代数”，和以射影几何为主体的“高等几何”，人们称之为“三高”。“三高”内容大致形成于20世纪以前。现代大学数学系的基础课，除“三高”外，还增加了泛函分析、抽象代数和拓扑学，人们称之为“新三高”。“新三高”虽然酝酿于19世纪，但其发展、定型、成熟则主要是本世纪上半期的事情。它们都是在原来抽象概念的基础上再次抽象出新概念并加以研究，是抽象之上再加上抽象的结果。它们一方面各自独立，各有自己研究的领域，另一方面又互相渗透，互相借鉴。不仅如此，还产生了许多边缘学科，例如，抽象代数与拓扑结合产生拓扑群，泛函分析与抽象代数结合产生算子环，拓扑与泛函相结合产生线性拓扑空间等。此外，非线性分析用代数拓扑作基础，李群与李代数又以泛函为工具，拓扑中发展出同调代数，代数几何又促进微分几何的发展。因此，如果能占领“新三高”这一制高点，就可能窥见现代基础数学的全貌。

（2）现代数学以集合论为基础，以结构为对象。

19世纪80年代康托尔集合论的产生，是数学进入现代数学时期的重要标志之一。集合论在本世纪之初就有很大的发展。它的思想方法不仅应用于几乎现代所有的纯数学部门，而且也应用物理学、质点力学等自然科学领域，以其为基础，改变了这些学科的面貌。几乎可以说，如果没有集合论的思想，很难对现代数学有一个全面而又深刻的理解。

集合中的元素不同，其“结构”也就不同。在整数集合中，只能进行加法、减法、乘法，不能作除法，而有理数集合则可以作四则运算（除分母为零外）。这说明两个集合的“代数结构”不同。在实数集合中，任意两个元素都可以比较大小，但是复数集合则作不到这一点。这说明两个集合的“序结构”不同。球面上任意一条封闭曲线能把原球面分成两部分，但是在环面上不一定能办到，例如，从中间剪一刀仍为一个整体，因此，球面与环面有不同的“拓扑结构”。法国布尔巴基学派就是用代数结构、序结构和拓扑结构将现代纯数学统一起来，把现代数学定义为研究结构的学科，犹如古代数学主要研究常量，近代数学主要研究变量一样。

（3）重视数学基础和数学哲学问题的研究。

数学基础和数学哲学问题的研究古已有之，但主要限于哲学家。康托尔的集合论产生之初期，由于不够完备，所以从上一世纪90年代开始，相继产生许多悖论，特别是1902年发现“罗素悖论”以后（悖论问题，详见本书4.5节），西方数学界宣布数学出现第三次危机。这时不同的数学家接受了数学历史上不同的数学思想和哲学观点，产生了数学基础研究中的不同学派。这些学派提出了不同的数学观点和改造数学的方案，他们互相争论，互相批判，把数学基础和数学哲学的研究推向高潮，至今余波未消。在本世纪初期的三分之一世纪里，是数学基础问题和数学哲

学问题研究的黄金时期。

（4）数学公理化是数学家们追求的重要目标之一。

欧几里得的《几何原本》是数学历史上第一个相当成功的理论体系。但是随着历史的发展，这个体系的缺点越来越明显（详见本书3.2节）。希尔伯特总结了历史上人们对《几何原本》的研究成果，出版了《几何基础》（1899）一书，这是数学进入现代数学时期的又一个标志。在该书中，《几何原本》的缺点得到满意的解决，它是公认的用公理方法建立数学体系的典型之作，影响很大：从此开始了数学公理化的趋势，例如集合论、抽象代数、拓扑空间以及概率论等都先后公理化。不仅如此，公理方法也被用于理论力学、相对论等自然科学领域。一个数学分支如果能够公理化，则被认为是成熟的、基础稳固的学科。因此，数学公理化是本世纪数学家追求的重要目标之一。

（5）新的数学分支大量的产生，数学应用更加广泛、深入。

本世纪除传统的数学继续发展外，新的数学分支如雨后春笋般地兴起，其中有博奕论（对策论）、规划论、排队论、最优化方法（如优选法、统筹法等）、管理科学（即运筹学）、模糊学等等。还有许多同数学有关的边缘学科，如控制论、信息论、系统论、生物数学、数学语言学、数学心理学、数学考古学等等，其名目之繁多前所未有。本世纪科学数学化的趋势更加明显，数学的应用空前的广泛、深入。

（6）电子计算机的产生与发展改变着数学发展的进程。

数学的发展是电子计算机产生的重要条件之一；电子计算机的产生与发展，反过来又影响整个数学发展的进程。随着它的发展，数学中的某些空白（如程序设计等）需要填补，有些过去不受重视的数学（如离散数学、近似计算理论等）需要加强。它的发展，也产生了一批同其有关的边缘学科，如人工智能、机器翻译、机器证明、图像识别和数据处理等。由于繁重的数字计算与

某些复杂的数学证明可以用计算机完成，所以把数学家从这些“简单劳动”中解放了出来，使数学家能够集中精力于创造性劳动，从此，数学家由一张纸、一支笔和一个脑袋进行研究的“手工业时代”，进入到可依靠电子计算机进行研究的“工业化时代”。作为数学发展的产物的电子计算机的产生和发展，不仅改变着数学发展的进程，而且也改变着整个科学技术和人类社会生活的面貌（参看本书3.6节）。

第一章 古代部分

1.1 数的概念的形成和发展

数和形是数学中两个基本概念，是现代数学大厦的两大柱石，整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变与发展而发展着的。恩格斯曾说："数学是数量的科学；它从数量这个概念出发。"① 那么，数又是怎样产生的呢？对这个问题，历史上有着许多不同的认识。西方有毕达哥拉斯学派的"万物的本原是一"的观点，我国也有与之相同的"一者万物之所从始"的观点。可见，一也是所有数的本原，至于一是如何产生的，在持这一观点的人看来，自然是先验的了。此外，我国古时不仅有"黄帝时隶首作数"的传说，而且也有"龙马负图，而数肇焉"的神秘主义观点。19世纪德国数学家克隆尼克更明确地说："整数是被亲爱的上帝造成的，其它的一切都是人的工作。"②

数的概念到底是怎样产生的？下面作一个简单的历史考察。

1.自然数概念的形成

自然数1、2、3等等，又叫正整数，现在一般人对它们都很熟悉，而它们的形成过程却非常缓慢。根据一些数学史工作者在上一世纪末对于还处于落后状态民族的调查可知，这些民族只有极简单的数的概念。例如，那时澳洲有些民族，只有表示1与2两个数的名称，他们把3叫做"2—1"（2+1），把4叫

---

① 恩格斯：《自然辩证法》，第235页。

② 斯特洛伊克：《数学简史》，科学出版社1956年版，第140页。

做“2—2”（2＋2），再大的数就没有了。有的民族也许还可以多数几个数，但是很快就数不下去了。其它的数，只能用“多”、“无数”一类词去表示，不像我们今天，可以“一而十，十而百，百而千，千而万”地继续数下去，只要有必要、有时间，就可以无限制往下数。可以想象，我们的远古祖先对数的认识，大体上也经历了和上述落后民族类似的过程。

自从有了人类社会，由于实际的需要，必须有一些表达简单数字的方法。起初，人们只能“近取诸身”——用自己身体某些部分的名称，作某些数目的同义语。比如，用眼睛或耳朵表示2，用一只手和双手分别表示5和10；原始人没有鞋，所以也用整个人表示20等。当然，这时的2、5、10与20，并不像现在那样被抽象地理解，而是分别被理解为：“像一个人的眼睛或耳朵那样多”，“像一只手的手指头那样多”，“像一双手的手指头那样多”以及“像一个人的手指头和脚指头那样多”。有了这些同义语后，人们不仅可以用其表示物体的数目，并且还可以进行简单的运算。比如，不管是5件工具，还是5个人，就知道它们可以与一只手的手指头一个一个地对应起来，所以就伸出一只手；这时如果走掉一个人或拿走一件工具，他们就弯一个手指头。可见，这时的手指头已被理解为被计算的对象。今天的儿童开始学习识数也常常利用手指头。恩格斯说，用以计数的十个手指头，“可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物”①。

经过一个相当长的时期后，人们就不必真正地把手伸出来，与物件的数目进行对比，仅用表示手的语言就行了。关于这一点，我们可以从一些民族的语言文字中找到某些痕迹。例如，汉语中的2与“耳”同音；俄语中的5（пямь）就是从“手掌

① 恩格斯：《反杜林论》，第35页。

骨”（пясмь）变来的等。人们慢慢地体会到，数是物体集合的一种属性，这种属性，对于那些可以一个一个地对应的集合来说是共同的，而对于那些不能一个一个地对应的集合来说是不同的。经过长期地与两只眼睛、一只手的手指、双手的手指头以及四肢的手指和脚趾比较的结果，就形成了2、5、10与20这些数的概念。其它数的概念的产生也经历了类似的过程。比如，古代印度人看到天上有一个月亮就用月表示1，也用眼睛表示2，其余有4“海”、5“官”、6“味”、7“山”与8“神团”等。经过漫长的岁月，人们世世代代同类似印度的4海、5官、6味、7山、8神团这些集合比较的结果，就形成了4、5、6、7、8这些数的概念。

2、5、10、20这几个数的概念，相对地说产生得更早一些，它们在自然数概念的形成过程中起着特殊的作用，被称之为“枢纽数”，其它的数往往通过它们表示出来。比如，罗马数字分别用Ⅳ（5－1）、Ⅵ（5＋1）、Ⅶ（5＋2）、Ⅷ（5＋3）、Ⅸ（10－1）表示4、6、7、8、9。我们常说的“二十”、“三十”等，就分别是“两个十”、“三个十”的意思，美洲有些印第安人就把26说成是“两个10再加6”；法语中的80、90和120分别是“4个20”、“4个20加10”以及“100加20”等。

社会的发展，较大部落和国家的出现，尤其是商业的产生和发展，对数的概念的发展和计算技术的进步起了巨大的推动作用。但这并不是说，人类对所有自然数的认识都经历了同样的过程。当人们认识到一定数目的自然数之后，通过加法和乘法运算往往得出更大的数。我国在春秋时期，除过有十、百、千、万以外，还有表示更大的数的亿、兆、京、垓等十个专有名称，并且都是十进位，即十万为亿，十亿为兆等等。汉代以后，大都改为万进，即万万为亿，万亿为兆等等。由十进改为万进，可以表示更大的数目，反映了社会发展的需要，也符合人们认识的规律。

人们逐渐发现，任何一个自然数加上1就是下一个自然数，以此类推下去，发现自然数是数不完的，是无穷无尽的。这样，人们在长期的社会实践中，经过了一系列认识上的飞跃：由具体到抽象、由个别到一般以及由有限到无限等，终于建立起第一个数的系统——自然数系。

在自然数概念形成的同时，人们为了实际的需要，比如，统治者需要向劳动人民征集税款以及交换的需要等，这些不仅需要完整的数的概念和比较完善的计数方法，而且还需要把计算的结果记录下来或告诉别人，于是表示数的概念的符号就成为必要的了。

2.记数符号的形成和发展

记数用的符号，也是在人类的社会实践活动中逐渐形成、发展、完善、最后趋于一致的。在数的概念的形成过程中，人们为了各种实际需要，各民族曾经创造了种种表示数目多少的记数方法。比如，有的民族用刻划（即用坚硬的东西在木块或居住的墙壁上划出一道一道的痕迹表示数目），有的民族用结绳，有的民族用小木棍，也有的民族用小石子等。我国苗族人就曾经用存放小石子的方法记载年龄。我国独龙族人曾经用刻木或结绳记日。如果二人约好会面日期，就在一个木棍上刻上格子，从中劈开，各持一半，分别后双方每天各削去一格，等削到只留一格时，就到会面的时间。据说，他们外出时，腰系一绳，过一天打一个绳结，以记离家的天数。用刻划和小石子记数，我们还可以从现代的语言文字中找到一些痕迹。比如英语中含有计算之意的tally，来源于拉丁语刻划（talea）；拉丁语中的Calcnlus（计算）本来就是小石子。我国春秋时已用经过加工的“筹”进行计算，于是才有成语“运筹帷幄”。世界各民族，在历史上都有自己独特的记数符号。作为例子，我们把古代巴比仑、埃及、希腊以及罗马的记数符号加以对照列表如下（表一）：

表一

现代	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000	10000
巴比仑	▼	▼▼	▼▼▼	▼▼▼▼	▼▼▼▼▼	▼▼▼▼▼▼	▼▼▼▼▼▼▼	▼▼▼▼▼▼▼▼	▼▼▼▼▼▼▼▼▼	<	<<<<<	▼▸		<▼▸	<<▼▸
埃及	|	||	|||	||||	|||||	||||||	|||||||	||||||||	|||||||||	∩	∩∩∩∩∩	9 (ϱ)	99999	𓆼	𓂭
希腊	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	ν	ρ	ϕ	,α	M
罗马	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M	

从表一可以看出，这些数字符号虽然都比较原始，但它们都经过了一个相当长的演化过程。以罗马数字为例，起初只有4个符号，即表示1的一条竖线丨，表示10的两条交叉线╳，表示100的半圆⊂以及表示1000的圆圈加一条直径①。后来，取╳的一半表示5，逐渐形成V；取⊂和①的一半分别表示50与500，并演化成L与D，于是才有了表示1、5、10、50、100、500和1000的7个符号：I、V、X、L、C、D、M。

我国的记数符号，从现在已经考证到的殷商时期的甲骨文起，经过周和先秦时期的钟鼎文和秦汉时期的小篆，直到汉以后才有了现在通用的记数文字；并在用筹作算的基础上，形成历代历法和数学中计算用的筹码；明以后，筹码又发展成商业上通用的暗码。它们的演化列表如下（表二）。

表二

现代汉字		一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
殷商甲骨文		一	二	三	☰	☒	∩,∧	＋	)(	九	|
先秦钟鼎文		一	二	三	☰,四	三,☒	介	＋	)(	九	|
秦汉小篆		一	二	三	四	☒	六	七	八	九	十
数学筹码	纵式	|	||	|||	||||,X	|||||,ō	⊤	⊤|	⊤||	⊤|||,X	0
	横式	一	二	三	☰,X	三,ó	⊥	⊥	≟	≟,X	0
明清暗码		〡 / 一	〢 / 二	三	X	〥	〦	〧	〨	〩	0

现在各国通用的所谓“阿拉伯数字”：1、2、3等等，一

般认为，至少起源于4世纪之前的印度。它最初并不是现在的形式，也没有零。在4～5世纪的文物上用圆点“·”表示零，9世纪时才将圆点·改为圆圈0。这种记数法8世纪时传入阿拉伯。因这时的阿拉伯还没有印刷术，书籍全用手抄，字形因人因地而异，在不同的地区出现了不同的书写形式，这就是所谓的东阿拉伯数字和西阿拉伯数字，以后又以西阿拉伯数字为主体逐渐合流。10世纪时开始由阿拉伯传入欧洲。所以数学史称之为“印度—阿拉伯数字”。这种数字在欧洲经过六百余年的多次演化，直到16世纪才定型成为今天的形式。现代的数字形式不仅同开始在印度时完全不同，而且与初传入欧洲时的形式比较也是面目全非的。所以今天的“阿拉伯数字”，并非某一个民族、某一个国家和地区以及某一个历史时期的产物，而是许多民族和国家，在前后一千多年的实践活动中逐渐形成的。

也有人认为，今天的“阿拉伯数字”是从我国藏语中有关文字发展出来的。这一见解虽未取得公认，但并不牵强附会，不失为一家之言。

“印度—阿拉伯数字”今天之所以能够在全世界通用，是因为用它记数有两个突出的优点：一是，它的字形整齐，笔划简单，差不多都可以一笔写成，书写方便；二是，用它记数，采用“位置制”原理，就是说，同一个数字，由于它所处的位置不同而代表不同的数值，比如，222这个数，其中三个2由于位置的不同而分别表示200、20和2。这样一来，只要用9个数字和一个0，就可以简单明了地表示任何一个自然数。例如372这个数，若用上面提到的几种方法表示，则分别为：

𒐚 𒌋𒐖	999∩∩∩∩∩∩∩ll	CCCLXXII	τοβ
巴比仑[1]	古埃及	罗马	古希腊

① 巴比仑的记数法是60进制，因此372 = 6 × 60 + 12。

用印度—阿拉伯数字表示分数、小数、指数和对数等更加方便。不难设想，若用上面这些记数符号表示分数和小数等，进而进行四则运算，是很不方便的。所以今天用印度—阿拉伯数字乃是人们在长期的社会实践中“择优”的结果。数学史对这种数字的采用给予了极高的评价，称其为计算技术的一次革命。马克思非常赞同“这是最妙的发明之一”①的观点，恩格斯则把它称之为“现代数字”②。当然，各民族从自己原来的记数法，过渡到用印度—阿拉伯数字记数，也有一个混合使用的过程。比如，15世纪的欧洲，有的书把125印成C25，把202印成CC2等。位置制的采用也有一个过程。比如，曾有人把1380这个数表示成1000・300・80等。

我国早在殷商时代的甲骨文中，就有从一到十以及百、千、万等十三个记数用的单字。从一到十逐渐发展成今天相应的汉字，笔划也非常简单，并且自那时起一直采用位置制。例如，“三万四千七百六十二”这个数，常常略去万、千、百、十而记为“三四七六二”。无论是用筹码记数，还是用珠算记数，都是采用这个原理。用筹码记数，凡5以下的数采用加法原理，是几就划几个线段，这与巴比仑和埃及人相同；但是从6到9，则采用“满六以上，五在上方，六不积算，五不单张”③的方法，这比巴比仑和埃及人仍用加法原理为优。至于用筹码表示多位数，则是用“一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当”④的方法，意即从个位起采用位置制原理，纵式与横式交替使用。例如34762这个数，用筹码表示就是川≣╥⊥‖，这比巴比仑与埃及人用的加法和乘法原理更为优越。所以从隋唐时代起，印度记数符号虽然屡次传入我国，但是我国古代科学家并不重视它。明末以后，

---

① 马克思：《数学手稿》，人民出版社1975年版，第205页。

② 恩格斯：《自然辩证法》，第9页。

③ 《夏侯阳算经》卷上。

④ 同上书。

随着西方科学的传入，已经定型的印度—阿拉伯数字再次传入我国，但是我国科学家仍将它译成汉字，让它无用武之地。它在我国流行，主要是在本世纪，尤其是印刷上将竖排改为横排，从根本上为这种数字在我国的推广和普及创造了条件。

记数符号的出现，标志着人们对数的认识水平的提高。当人们写出一个数字比如7的时候，不一定是指七个具体的东西，首先是抽象的7，符号7是七的概念的物质外壳。有了数字符号，人们就可以用它以抽象的形式进行运算，比如，作加法只是将被计算的对象在想象中“放在一起”，而对被计算的对象来说却什么也没有发生。显然，人们这种“撇开对象的其他一切特性而仅仅顾到数目的能力”，“是长期的以经验为依据的历史发展的结果”①，绝不是人们先天就有的。

人们的社会实践进一步发展，常常要求人们通过已知的数量确定出未知的数量，因此，就必须研究已知数同未知数之间的关系。在研究过程中，人们把未知数用文字表示。比如，在西方未知数用拉丁字母x、y、z等表示，而在我国过去则用天、地、人、物表示。谁都知道，用代数方法解决应用问题，比用算术方法简便得多，重要原因就是用文字表示了未知数。数学进一步发展，人们不仅用文字表示未知数，而且还用文字表示已知数（比如，我国古算中用甲、乙、丙等表示，现在通用a、b、c等表示）。这标志人们对数量关系的认识又提高了一步。因为只有使用了文字，才能摆脱使用具体数字的局限性，可以更普遍地揭示数量关系的一般规律。比如，谁也知道，用$a^2+b^2=c^2$表示勾股定理，比之用“勾三、股四、弦五”具有更普遍的意义。不用文字表示数字，就没有一般的数学公式。所以，用文字表示数字，为我们提高运算效率创造了条件，为用数学公式解决实际问题开

① 恩格斯：《反杜林论》，第35页。

辟了道路，也为数学的发展创造了条件。在初等代数中，用公式 $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a$ 解一元二次方程就是一例。所以用文字a、b、c、x、y、z等表示数字，并对其进行运算，是16世纪数学重要成就之一。

17世纪时，笛卡尔把变数x、y等引入数学，紧接着牛顿和莱布尼茨等又在这个基础上把无限大、无限小引入数学，建立了变量数学，这是数学发展的转折点，是数学发展史上一次重大的变革。其实，变数正是客观世界中物体的运动和变化在数量上的反映，无限小、无限大、高阶无限小和高阶无限大等数学概念，也是现实世界中物质层次结构和工程上“数量级”概念的数学抽象，它们都有牢固的现实基础。恩格斯曾说：“自然界对这一切想象的数量（指各阶无限小和各阶无限大——引者注）都提供了原型”①，它们绝不是数学家的“自由创造和想象物”，也不是什么“神秘的量”！

3.数的概念的发展

较小的自然数和简单的分数（如1/2、1/3、2/3等），毫无疑问，起源于计算物件的数目和实际测量，即来源于人类的实践活动。同时，人们发现 $2+1=3$，$5-1=4$，$5+3=8$，$10-1=9$ 等，所以加法和减法也就慢慢地产生了。通过无数次的加、减运算，又逐渐形成了乘法和除法运算；进而又在乘和除的基础上产生乘方与开方运算。这样，就从简单的数的概念中，逐渐产生了加、减、乘、除、乘方和开方六种代数运算。数的概念，就是在自然数的基础上，通过这六种代数运算逐步扩张的。数的扩张，可以概括为如下四个阶段。

第一次是由于解决不能整除的矛盾而由正整数扩张到正分数。正整数和正分数的全体叫正数。

第二次是由于解决不够减的矛盾而由正数扩张到零和负数。

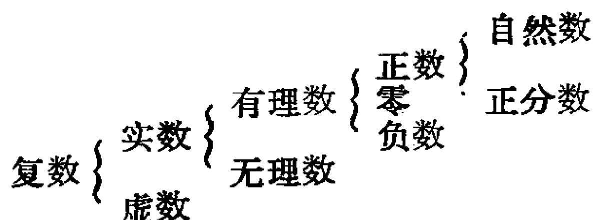
---

① 恩格斯：《自然辩证法》，第245页。

正数、零和负数的全体叫有理数。

第三次是由于解决正数开方开不尽的矛盾而由有理数扩张到无理数。有理数和无理数的全体叫实数。

第四次是由于解决负数不能开偶次方的矛盾而由实数扩张到虚数。实数和虚数的全体叫复数。这些数之间的关系列表如下：



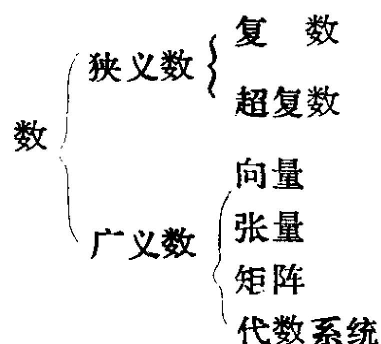
一方面，没有基本的、简单的自然数概念，就不可能产生加、减概念。人们在反反复复的加减运算中，逐渐认识到乘法和除法，因为乘法是加法的简便法，除法是减法的简便法。同样，在多次的乘、除运算中，逐渐形成了乘方和开方运算。一般说来，人们只有运用了除法运算，才对分数的多样性有了认识；只有运用了减法运算，才真正认识到零和负数；同样，只有运用了开方运算，才产生了无理数和虚数概念。可见数的概念是在代数运算的矛盾运动中逐步扩张的，矛盾每解决一次，数的概念就扩张一次。另一方面，分数、负数、无理数及虚数概念的产生，使数的概念分别由自然数到正数，由正数到有理数，由有理数到实数，再由实数到复数。这些推广了的数的概念反过来又扩大了六种代数运算的适用范围。

虚数的产生虽然是16世纪的事情，但在18世纪以前，除了在牛顿和莱布尼茨等一些著名数学家的研究工作中偶而遇到它以外，没有人专门去研究。因为当时的科学技术还用不到虚数这样的数学工具。从18世纪开始，从事研究复数的人增多。一直到19世纪中期，人们才真正弄清楚，对于六种代数运算来说，复数概念已不必要、也不可能再扩大了。

复数产生了，而人们对数的认识并没有完结。尽管对六种代

数运算来说，复数概念不可能再扩张了，但是我们还可以像由两个实数组建立复数那样，从另一个侧面进行扩张。由三个以上的实数组所组成的“多元数”就称为超复数。在多元数中，应用较多、研究的也比较充分的是“四元数”。四元数是1843年10月16日由英国的哈密顿提出的。任何一个四元数都是由一个标量a（实数）和一个向量xi+yj+zk之和构成：a+xi+yj+zk（i、j、k是三个单位，x、y、z为实数）。数学把复数和超复数的合体称为狭义数。

相对于狭义数，又出现了许多以“运算”为其特征的概念，这些概念称之为“广义数”，例如向量、张量、矩阵以及带有某种“运算”的“数”的集合即代数系统（包括群、环、域等）等。因此，现代数的概念很广，它们之间的关系如下表：



4.虚数的原型问题

虚数的产生，并不像某些人所说的那样，它是“悟性的自由创造物和想象物”。我们已知，正数是从现实世界中抽象出来的，负数作为正数的对立物，也是有牢固的现实基础的。同样，开方运算也是相当广泛的一类数量关系的反映。既然负数和开方运算都有客观根据，那么，对负数施行开平方运算而产生虚数，正如恩格斯所说的那样，“是合理的相互关系”，“毕竟是正确的数学运算的必然结果”①。这就是说，虚数并不“虚”，不是什么“鬼魂”和“两栖物”，也不是数学家随心所欲的杜撰。

① 恩格斯：《反杜林论》，第35、119页。

既然如此，虚数在客观世界中有没有原型呢？这个问题从虚数产生以来曾困惑了不少的人。一些人当看到虚数比如$\sqrt{-1}$（数学上用 i 表示）后，总想找到它的原型。这些人不自觉地用实数的标准要求虚数。数的性质告诉我们，凡实数均有大小顺序，但是虚数却没有大小之分，而只有相等和不相等之别。既没有大小，要想同实数的原型一样，找一个有大小之量用虚数表示当然不可能。

恩格斯曾说："自然界对这一切想象的数量都提供了原型。"① 这是恩格斯《关于现实世界中数学的无限原型》这段数学札记中的一句话。对这一论断如何理解呢？这里所讲的"这一切想象的数量"是指无限大、高阶无限大、无限小、高阶无限小、微分和积分这些数学概念。恩格斯在这段札记中，对这些无限概念的现实原型问题已有充分论述。那么是不是说虚数进而复数就没有原型了呢？也不能这样简单地回答。数学是具有高度抽象性的一门学科，这一特点决定了包括复数概念在内的许多数学概念的原型，既不同于工程上的"模型"，也不同于生物学和矿物学中的"标本"，而往往是以抽象的形式、以直接和间接在现实世界和其他自然科学中的应用体现出来。用复数表示向量就是它应用于自然科学的一例。

在数学、力学和物理学中，经常遇到的量有两类：一类如长度、面积、体积、时间、质量以及温度等，这些量只要用一个数就能够确切地表示出来，这种量就是通常所说的数量；另一类如力、速度、加速度、位移、电力和磁力等，这些量除了大小要用一个数表示以外，还必须用另一个数表示方向，才能把它们准确地表示出来，这种量称为向量或矢量。如图1.1，通常把大小（即长度）为r、方向（即同 x 轴的正方向的夹角）为 θ 的向量记为

① 恩格斯：《自然辩证法》，第245页。

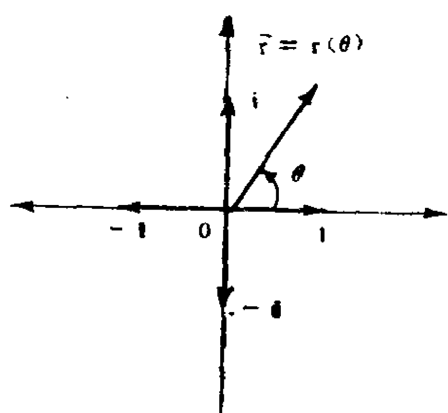


图 1.1

$\vec{r}=r(\theta)$。用一条有方向的线段表示向量，虽然既直观、又简单，但是无法进行定量的运算。自从有了复数，科学家发现用复数表示向量非常恰当。这样，向量同向量、向量同数量之间的加、减、乘、除、乘方和开方六种代数运算，都可以通过表示它们的复数之间的相应的运算来完成，而且都能得到满意的几何解释。比如，加法是按照“平行四边形原理”进行的。也就是：两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$之和（$\vec{a}+\vec{b}$）是以它们为邻边所作的平行四边形的对角线所表示的向量。再比如，两个向量$r_1(\theta_1)$与$r_2(\theta_2)$的乘积表示另一个向量，这个向量的大小为r_1r_2，其方向为$(\theta_1+\theta_2)$，即$r_1(\theta_1)r_2(\theta_2)=r_1r_2(\theta_1+\theta_2)$。这样定义了乘法以后，就有$1\cdot1=(-1)\cdot(-1)=1$，$i\cdot i=(-i)\cdot(-i)=-1$，$(-i)i=i(-i)=1$等等成立。此外，平面上一切可能的运动——平移、旋转、伸长和压缩以及它们之间所有可能的结合，皆可以通过复数之间的运算表示出来。如果向量本身是变化的，则表示它的复数也是变化的，进而对它们可以进行微分和积分运算。既然像力、速度等一些重要的物理量可以用复数表示，对复数进行运算，又能准确地表示这些量相互作用的结果，因此，研究复数，发展复数理论，就不是无聊的数学游戏，而是有着实际意义的。19世纪，数学重要成就之一就是产生了一门专门研究复数理论的数学分支——复变函数理论。这个理论不仅直接应用于数学的各个领域，而且还广泛地应用于各种力学物理学以及各种技术科学。所以虚数并不是虚无飘渺的东西，而有着实实在在的应用。今天“虚数”这个名称同“无理数”一样，只不过说明人们在历史上对它的认识而已。

马克思主义哲学认为，纯数学所以在以后能被应用于现实世

界，仅仅因为，“它是从世界中来的，并且只表现世界联系形式的一部分”①。虚数的理论也是如此。虚数虽然很抽象，但它毕竟是数学“合理运算”的结果，归根到底来源于客观世界，能表现世界联系形式的一部分，所以虚数理论有重要的应用是无足奇怪的。虚数，既不是唯心论者所认为的是上帝创造的或天才人物的主观臆造，也不是机械唯物论者所认为的同1、2、3等一样是现实世某些量的直接抽象和概括，而是在数学发展过程中运用逻辑推理的产物。事实上，没有逻辑，不仅不可能有虚数，也不可能有负数和无理数。比如，单凭测量，无论怎样精确，也是测不出无理数来的。在数学发展的历史上，人们对第一个无理数$\sqrt{2}$和圆周率π的无理性的认识，都不是直接从测量中得到的，而是通过逻辑论证得到的。

虚数的产生，它的理论的发展以及在各个方面的应用，从一个侧面说明了数学发展同实践之间的辩证关系。一方面，虚数是从负数开平方得来，没有负数和开平方运算，虚数的产生是不可想象的。所以它归根到底来源于现实世界。不承认这一点就是唯心主义。但是另一方面，虚数毕竟不是从客观事物中直接抽象出来的，而是通过数字运算产生的。它的产生既为数学增添了新的内容，也为直接或间接解决数学和自然科学中的某些问题提供了数学工具，反映了数学发展相对独立的一面。不承认这一点就是狭隘的经验主义。

1.2 初等几何的产生和发展

1.图形和证明概念的产生

“几何”一词在我国始用于明末徐光启和利玛窦合译的《几何原本》，现已定型通用。但是，我国在“戊戌变法”以前，几

① 恩格斯：《反杜林论》，第36页。

何学一般称为"形学"，比如，那时的几何教科书称《形学备旨》（1885年）、解析几何教科书称《代形合参》(1893年)等。几何学的一些概念的形成过程与数的概念的形成过程类似，也要追溯到遥远的古代。

早在人类出现以前，山川日月已经存在，万物形状千变万化。人类出现后，不仅看到了各种物体的形状和变化，而且还在制造工具的过程中有意识地摹仿某些形状。起初，人们对形状的认识总是同具体的物体相联系的。比如：圆形总是同日、月、车轮和石磨等联系在一起；矩形总是同一块具体的石块或某块土地的形状等联系在一起；平面总是同地平面、水平面或其它具体的平面等联系在一起；直线也总是同拉紧的绳子以及笔直的树木等联系在一起，等等。随着社会的发展和人类认识能力的逐渐提高，人们把各种形状加以比较，并注意到它们的共同的和不同的特性，就逐渐形成了各种抽象的形的概念。比如：形成了没有厚度、只有广度的"面"的概念，没有粗细、只有长度的"线"的概念，以及没有大小、而只有位置的"点"的概念。同样，也产生了其它的形的概念，比如：三角形、矩形、圆形、角、多角形、立方体和球体等概念。恩格斯曾说："线、面、角、多角形、立方体、球体等等观念都是从现实中得来的"①。在人们获得了直线、圆形等形的概念以后，而进一步利用笔直的木棍作出直线、利用树杈作出圆形的时候，他们已经基本上掌握了这些圆形的性质。当人们在居住洞穴的壁上或者在制作的陶器上画出栩栩如生的飞禽走兽和整齐对称的几何花纹的时候，他们对"相似"和"对称"等几何概念已经有了一定的认识。

在各种形的概念形成的同时，也许稍晚一些，人们为了实际的目的，比如在确定两地的距离，估计某块土地的面积，以及确

① 恩格斯：《反杜林论》，第37页。

定容器的体积的过程中，逐渐认识到了一些简单的测算规律。比如，长方形的面积等于长乘宽，长方体的体积等于长、宽、高的乘积等等。我国古典数学名著《九章算术》的第一章叫“方田”，就是专讲各种不同平面图形面积的算法的，该书的第五章“商功”则专讲各种不同立体图形体积的算法。在希腊文里，几何学的原意就是“测地术”。正如希腊的历史学家欧第姆斯（公元前4世纪）所说的：“几何学是埃及人发现的，是从测量土地中产生的。因为尼罗河水泛滥，经常冲去界限，所以这种测量对于埃及人是必需的。”① 说几何学起源于测量土地，这是对的，但并不局限于尼罗河流域的埃及。实际上，凡是从事农业生产的民族，凡是有经验的农民，都有一定的几何知识。我国古时也有高度发达的几何学。

要度量一个几何量必须有一个单位即“量具”。最早的量具当然是很粗糙的。那时最简单、最方便的量具莫过于人体的某一部分。我国古书《史记》与《说文》都有“寸、尺、咫、寻、常、仞诸量度，皆以人之体为法”以及“禹以身为度”的记载。意即那时人们以身体的某一部分作为长度的单位，所谓“布指知寸，布手知尺，舒肘知寻”（《家语》）。我国古代数学著作常用“步”作为长度的单位。在西方，也有类似的例子。例如，英文中呎的原意为足（foot），码（yard）则来源于腰围（gyrgdan）之长等。各民族由自己原来的粗糙的单位过度到以后较为精确的单位，再过度到后来国际通用的单位，中间经过了相当长的时间。

根据现有的考古文献资料，巴比仑和埃及等文明古国都有最早的几何知识的记录。

埃及保留下来的古典数学文献已发现的有两本：一本是“伦

① 转引自А.Д.亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》第1卷，第21页。

敦本”，它于1858年被英国一个名叫兰德（A.H.Rhind）的古董商人发现，现存于伦敦博物馆；另一本是“莫斯科本”，它于1893年被俄国人哥列涅什叶夫（Голенищевъ）发现，现存于莫斯科美术博物馆。两本书都是用“问题集”的形式写的。据研究，后者是距今约3800年以前的作品，前者更早。在此二书中，除了一些简单的几何计算以外，还有计算正圆锥台体积的近似方法，以及计算正方形锥台体积的方法。特别是计算正方形锥台体积的方法是正确的，但是书中没有说明是怎么得出的，很可能是经验方法。

巴比仑人的几何知识总的说来不如埃及人，但是在某些方面也是埃及人所不及的。比如，今天把圆周分成360度的概念是巴比仑人的遗产。巴比仑人也知道比较一般的勾股定理：设p、q是两个正整数，当$a=p^2-q^2$，$b=2pq$，$c=p^2+q^2$时，$a^2+b^2=c^2$。

巴比仑和埃及的数学知识（包括几何知识在内），均属经验知识，都是对一个具体的数学问题采用独立的方法解决，没有一般性的数学命题（至少不明显），也没有逻辑证明思想。这些在希腊人那里有了突破。

希腊人吸收了巴比仑和埃及的数学知识，但并没有局限于了解一些具体的计算法则，而是有所发展，希腊人着意进一步了解这些法则之间的联系。

米利都学派的开山祖、主要代表人泰勒斯曾提出如下一般性的几何命题：

（1）等腰三角形的两个底角相等。

（2）相似三角形的对应边成比例。

（3）圆的直径平分圆周。

（4）半圆所对的圆周角为直角。

（5）相交二直线的对顶角相等。

（6）如果两个三角形有一条边及这条边上的两个角相等，

那么这两个三角形全等。

不难看出，上述几何命题已蕴含有逻辑证明的思想。作为这些命题的应用，泰勒斯曾利用金字塔的影长测量出金字塔的高，以及从海岸上一点到海上船只之间的距离等。

如果说泰勒斯的逻辑证明的思想还不够明显的话，那么毕达哥拉斯学派则有了明确的逻辑证明思想。毕达哥拉斯学派是一个政治、宗教和科学三位一体的组织，凡是这一学派成员的重要发现皆归功于学派的首领，所以今天无法考证该学派的主要贡献究竟归功于谁。众所周知，他们的主要观点是“实在是数的摹仿”，“数是万物的本原”。而他们所说的数，如三角形数与正方形数等等，均是以几何的形式出现的。他们对三角形的内角和定理、三角形全等定理以及相似形的理论等也有论述。不过最脍炙人口的是勾股定理的发现。这个发现不仅是几何学史，而且也是整个数学史上的重大事件。这个定理的提出，为几何学在实际中的应用开辟了道路，也是数学史第一次运用逻辑推理证明的范例。传说他们为此宰杀了一百头牛设宴庆祝，可见他们认识到这一定理在实际和认识论上的重要性。不过他们到底是如何证明这一定理的，今天已无法确定。今天所看到的最早证明是欧几里得在《几何原本》第一卷的第47题中给出的证明。

开奥斯的希波克拉底（很可能是毕达哥拉斯学派的成员）在已有的几何成就的基础上，把几何学整理成一个有逻辑次序的体系，写出第一部几何专著《几何原本》（Elements）。可惜该书已经失传，我们无法了解它的具体内容。据说，该书已用反证法，今天几何学中把字母注在图形上的方法也是由希波克拉底首创的。

2.由尺规作图而产生的几何三大难题

用直尺作直线和用圆规作圆，早在原始时代已经萌芽。在我国山东出土的古汉墓中，已有“伏羲手执矩、女娲手执规”的画

像。这里的“规”就是今天的圆规，“矩”是两个直交的直尺。我国甲骨文中已有“规”、“矩”二字，可见起源很早。矩的使用是我国古典数学的特长。它既可用来作直线、作直角，有时也可以代替圆规，更多的是用于测量，所说“平矩以正绳，偃(仰)矩以望高，覆矩以测深，卧矩以知远，环矩以为圆，合矩以为方”（《周髀算经》），堪称万能工具。刘徽的著作《海岛算经》是对矩的充分运用。《孟子·离娄上》说：“不以规矩，不能成方圆。”可见，我国在战国时期，“规矩”不仅是最基本的作图和测量的工具，而且已经发展成为人们的行为准则和道德规范的同义语。

希腊人也用尺规作图，但他们的主要目标在于训练智力，培养逻辑思维能力，这跟我国用规矩的主要目标是实际应用不同。

在古希腊奴隶制的繁荣时期，社会上出现了一批以教授智慧为职业的“智者派”（Sophists）。这些“智者”实际是一批职业教育家、科学家和哲学家。他们同当时的其它学派一样，重视思辨，力图寻求宇宙产生和发展的规律。智者派研究的主要目标之一是用数学来解释宇宙。他们中的相当一批人对用尺规作图颇感兴趣。由于他们忽视甚至卑视实用，而重视逻辑思维能力的训练，所以对作图的工具有严格的限制，犹如今天的体育竞赛有不同的竞赛规则一样。他们规定作图只能用直尺和圆规，而他们所谓的直尺没有刻度，并在二者单独使用的条件下，限于有限步骤内完成。正是在这种严格的限制下，才产生了种种难题。其中最有魅力、且影响最大的是所谓的“几何三大难题”：

（1）**三等分角**：三等分任意角。

（2）**倍立方**：作一立方体，使其体积二倍于给定的立方体。

（3）**化圆为方**：作一正方形，使其面积等于给定的圆面积。

在今天所看到的材料中，对于这三个问题的记载，有许多是以传说或迷信的形式出现的。传说不足为凭，迷信更不可信。它们的起源，从认识论的角度来说，实际是一些几何作图问题的延伸。当时的希腊人已经知道用尺规二等分线段和已知角这些简单的问题。在解决了用尺规二等分已知角后，提出如何用尺规三等分已知角的问题是自然的。同样，在解决了用尺规对已知线段加倍和对已知的正方形面积加倍方法之后，提出对已知立方体的体积加倍问题也是自然而然的。在几何学中用尺规求作一个图形，使其同已知的图形等积的问题是很多的。比如，求作一个正方形，使其同已知的矩形等积等。作为这类问题的继续就是，求作一个正方形，使其同已知的以曲线为边的图形等积。开奥斯的希波克拉底曾经证明，等腰直角三角形AOB同"月牙形"AEBD的面积相等（在图1.2中两块阴影部分的面积相等）。他的证法大致是：设ABC为等腰直角三角形，它内接于以AC为直径的半圆。设AC的中点为O，易知BO为垂直于AC的半径。再以AB为直

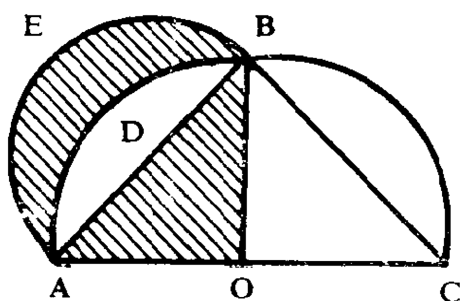


图 1.2

径作半圆，得到月牙形AEBD。因为

$$\frac{\text{半圆}ABC}{\text{半圆}AEB}=\frac{2}{1}$$

可见，二分之一半圆ABC同半圆AEB的面积相等，于是不难得出：

$$\triangle AOB=\text{月牙形}AEBD$$

既然可作三角形，使其同月牙形等积，那么，提出化圆为方问题

也就没有什么奇怪的了。所以，化圆为方问题乃是几何作图问题中面积互化问题的最典型的一个。

当然，这三个问题从提出到定型再到受到普遍重视有一个过程。根据数学史记载，最早提出这三个问题的可能是阿诺皮德斯，后经柏拉图提倡而被人重视。

在数学史中，很难找到像这样长期被人关注的问题。两千多年以来，无数人的聪明才智倾注于这三个问题而毫无结果。16世纪以来，世界上许多重要的学术机关和数学刊物，都曾接到大量的关于这三个问题的“解答”的来信，要求审查。1775年，法国科学院为摆脱这种无休止的干扰，曾作出决议：不再审查“三等分角”、“倍立方”、“化圆为方”以及“永动机”方面的“论文”。实际上，这三个问题都是在所给的条件下不可能解决的问题。1837年，凡齐尔曾给出三等分任意角和倍立方不可能性的证明。1882年，林德曼给出化圆为方不可能性的证明。1895年，F. 克莱茵总结了过去的研究，给出这三个问题简单而明晰的证法，彻底解决了延续两千多年的难题。

尽管这三个问题的不可能性已经证明，但是我国也有一些青年，由于对“破除迷信”和“不崇洋媚外”的片面理解，仍企图独步古今中外、压倒前人。这些人不是被问题的“简明性”所吸引，就是忽略作图的条件。如果撇开作图的条件，这些问题不仅早已解决，而且解决的方法很多。下边仅举几例。

阿基米德在直尺上添一个点就轻而易举地解决了三等分任意角的问题。他的作法是：设尺的一个端点为O，在尺上记一点P，并设所要分的角为∠ACB（图1.3）。以C为中心、OP为半径作圆交角边于A、B点；让P点在圆周上移动，此时让O点在AC的延长线上移动，使直尺经过B点。由于OP = CP = CB，易知$\angle COB = \frac{1}{3}\angle ACB$。由于在直尺上添了一点P，这意味着直尺

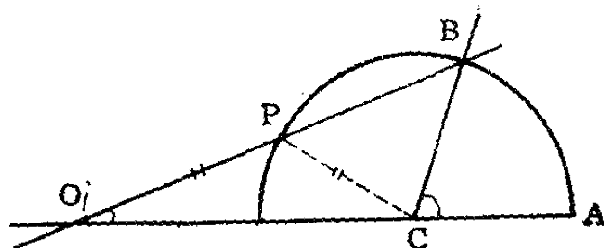


图 1.3

有了刻度；P点在圆周上移动，实际是尺规联用。因此，阿基米德的方法不符合作图规则。

也有人设计了一个三角分角器（图1.4），虽可分任意角，仍不符合作图规则。

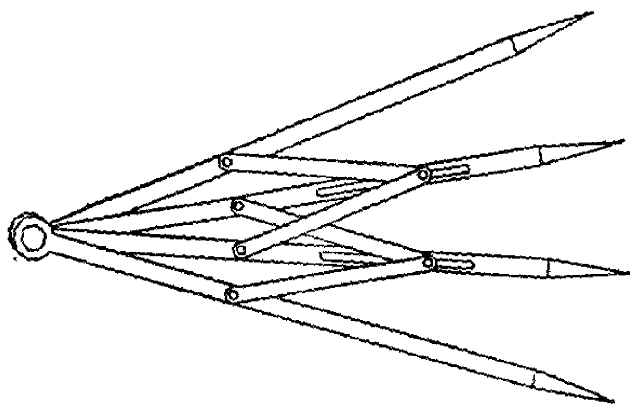


图 1.4

开奥斯的希波克拉底、阿基塔斯和梅内克缪斯等都对倍立方问题有过可贵的设想。例如，要给边长为a的立方体加倍，把梅内克缪斯想法用现在的符号表示就是：以两条抛物线$y^2=2ax$与$x^2=ay$的交点的横坐标为边长的立方体，其体积二倍于以a为边的立方体。这个思想也可用“柏拉图作图法”来实现：取两个直角曲尺——我国古时的“矩”，如图1.5所示，让两个矩的一边重合（即图1.5中的MN），并在互相垂直、且交于O点的二直线上作出A、B、M、N四点，使$OB=a$，$OA=2a$；并令$OM=y$、$ON=x$。由于

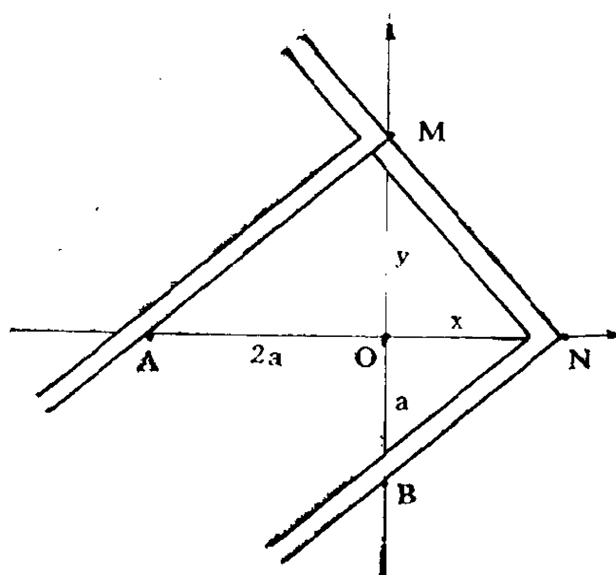


图 1.5

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a},$$

易知以x为边长的立方体的体积恰好就是以a为边长的立方体的体积两倍。由于矩是两根直尺构成的，且两个矩结合使用，因此，这个方法不符合作图规则。

文艺复兴时期重要代表人物达·芬奇曾对化圆为方问题提出一个巧妙的“解决”方法。他的方法是这样：取一个半径为r、高为$\frac{1}{2}$r的圆柱，让它在平面上滚动一周（图1.6）产生一个矩

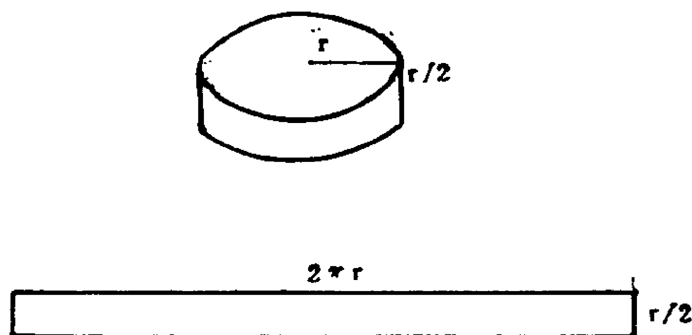


图1.6

形，该矩形的面积为$2\pi r\cdot\frac{r}{2}=\pi r^2$,正好是半径为r的圆面积。再作一个正方形，使其面积等于矩形的面积，于是“圆就化为方”了。这个方法虽然巧妙，但并不规范，因此未获得承认。

用尺规不能化圆为方，用平面几何中割补的方法能不能实现呢？也就是：能否把一个与正方形等积的圆分割成若干小块，再把这些小块拼成正方形呢？数学家已经证明，任何多边形都可以用割补的方法拼成正方形。

1900年，希尔伯特提出了23个问题（见3.2节），其中第3个问题实际是问：两个等底等高的四面体，能不能将其中一个分割成若干小块，再用这些小块拼成另一个？1901年，希尔伯特的学生德恩证明不可能。这说明空间情形与平面情形有本质不同。

1925年，波兰的塔尔斯基根据集合论、测度论进一步提出：能否把圆拆成有限个点集（不必是以线为边的图形），再用这些点集拼成正方形？这时拆开的方法比之初等几何复杂得多，涉及集合论、测度论以及其它许多现代数学知识。这是古老的化圆为方问题在现代数学中的再现，至今既没有证明其可能，又没有证明其不可能。

3.《几何原本》及其意义

（1）《几何原本》产生的历史背景。

《几何原本》是希腊数学家欧几里得的数学名著，它的产生同当时的历史背景密不可分。

希腊文明源远流长。而公元前7～公元前4世纪，已是希腊奴隶制的发达时期，产生了二百多个城邦，逐渐形成了以雅典为盟主的希腊世界。这时奴隶主的民主派，不从事体力劳动，专门从事科学文化活动，他们在吸收巴比仑、埃及和印度的科学文化、整理自己的传统科学文化方面起了积极作用。也就是从这时起，许多重要的科学成就都同个人的名字联系在一起。

在希腊世界内部发生矛盾、经济出现危机的情况下，位于希腊北部的马其顿崛起。公元前334年，马其顿的统治者亚历山大率兵南下，统一了这一地区，建立了一个地跨亚、欧、非三洲的亚历山大帝国，并在尼罗河口建立亚历山大城，统治者亚历山大于公元前336年继承王位。但是帝国不久分裂为三：安提柯王朝统治下的马其顿，托勒密王朝统治下的埃及和塞琉古王朝统治下的叙利亚。帝国分裂不久，希腊西部的罗马城邦兴起。先后征服邻近各国，并于公元前30年消灭埃及，从此进入罗马时期。科学史一般以公元前336年为标志，其前属希腊前期，又称古典时期；其后称为希腊后期，又称亚历山大里亚时期。《几何原本》和《圆锥曲线论》就产生在希腊后期。

在希腊前期，各个城邦民主气氛浓厚，思想活跃，形成不同学派，把希腊文化推向高峰。在希腊文化普遍繁荣的情况下，希腊数学也得到高度发展。据数学史记载，对数学作出重大贡献的计有：爱奥尼亚学派的泰勒斯；毕达哥拉斯学派的某些成员；巧辩学派的安提丰、布赖森；欧多克斯学派；开奥斯的希波克拉底；柏拉图学派有北非施勒尼（Cyrene）的泰奥多勒斯、意大利南部泰兰吐姆（Tarentum）的阿基塔斯梅内克缪斯、狄诺斯特拉德斯、希艾泰德斯、比台恩（Pitane）的奥托利库斯、以及托伊提乌斯等等。经过这些人的工作，希腊前期的几何材料已经相当丰富，令人眼花缭乱。对之进行整理的工作已经提上日程。希波克拉底和托伊提乌斯等都做过综合整理的工作。欧几里得就是在这些人的工作基础上，完成了他的巨著《几何原本》。经研究，《几何原本》的所有内容都能从希腊前期学者们的工作中找到根据或痕迹。特别应当指出的是，亚里士多德提出的公理方法对欧几里得完成他的巨著起了不可忽视的作用，没有亚里士多德的逻辑学，也许不会有《几何原本》。

欧几里得《几何原本》（以下简称《原本》）的手稿现已无

存。现在通行的英译版本是由以研究希腊数学史著称的希思等对以下几方面的材料研究整理的：（1）亚历山大城的泰奥恩（4世纪末)对《原本》的修订本的抄本；（2）佩拉在梵蒂冈图书馆发现的10世纪的一个抄本，这个抄本是来自泰奥恩以前的一个抄本；（3）希腊著作的阿拉伯文的译本和评注。由于材料来源众多，所以重新整理的《原本》难免不够准确，但对了解欧几里得的原意已足够了。

我国现在唯一的汉译本是1607年利玛窦和徐光启合译的《原本》前6卷，和1857年伟烈亚力和李善兰合译的《原本》后9卷。前6卷是根据利玛窦的老师、德国数学家克拉维斯校订增补的拉丁文本《原本》译出的；后9卷似是由巴罗1660年英译本《原本》译出的。本世纪以来，西方某些中学所用的几何课本是仿照18世纪末期勒让德对《原本》的改写本编写的。

欧几里得生活在希腊后期。关于他个人的情况，史书没有记载。科学史家认为他可能受教于柏拉图学院，但以后在该学院授徒是肯定的。关于他有两个传说：一个是，一次国王托勒密问欧几里得，学习几何学有没有捷径。欧几里得回答说："在几何里，没有专为国王铺设的大道。"另一个是，他的一个学生，才学第一个命题就问欧几里得，学习几何学以后能得到什么，欧几里得就叫人给这个学生几个钱让他回去了，因为他认为只想得到实惠的人是学不好的。

欧几里得写《原本》的目的也是数学史家感兴趣的问题。有人认为他是为数学家写的学术论著，也有人认为他是为学生编的课本，其实二者兼有更为可能。

除《原本》以外，欧几里得还写过其它一些著作：在物理学方面有《光学》、《镜面反射》，其体裁与《原本》相同；在数学方面还有《数据》（可能是作为复习《原本》用的一批练习题），《二次曲线》（这是仅次于《原本》的数学著作），《曲

面——轨迹》；天文学方面有《现象》（其中有球面几何的18个命题等）；另外还有《论剖分》、《衍论》和《辨伪术》等。以上著作有些已失传，但多数被保存下来。

（2）《几何原本》概观。

《几何原本》共计13篇（章），完全是按亚里士多德的公理方法叙述的。

第1—6篇是平面几何学。

第1篇。首先给出36个定义，前4个是：

（1）点是没有部分的东西。

（2）线（曲线）是没有宽度的长度。

（3）线的两端是点。

（4）直线（段）是同其中各点看齐的线。

此外还有平面、平角、直角、锐角、圆、三角形、四边形等等的定义。接着按照亚里士多德关于公理和公设的区别（前者是适用于一切科学的真理，后者仅适用于几何学，今天统称为公理），欧几里得给出五个公设和五个公理。

五个公设是：

（1）从任一点到任一别的点（可）引直线。

（2）有限直线（可）循直线延长。

（3）以任一点为中心和用任意长的半径（可）作一圆。

（4）凡直角都相等。

（5）若一直线与另外两直线相交，且在同侧二内角之和小于两直角，则这两条直线无限延长后必相交于该侧的一点。

五个公理是：

（1）等于同一量的量彼此相等。

（2）等量加等量其和相等。

（3）等量减等量其差相等。

（4）互相重合的量彼此相等。

（5）整体大于部分。

接着欧几里得叙述了48个命题（定理）。其中命题5是所谓的"驴桥"问题。

命题5．等腰三角形的底角必相等。

如图1.7所示，这个问题本来引顶角的平分线证明简单，但《原本》命题9作平分线，还未讲到，只能用前边四个命题。方法是延长AB至B′，延长AC至C′，并使AB′＝AC′，联结BC′、B′C。详细证明写起来一大篇，于是产生"驴桥在此，愚者莫过"之叹。据记载，13世纪时，牛津大学的学生能懂得命题4以后的寥寥无几，命题5成了"笨蛋的难关"。

命题29．一直线与两平行线相交时内错角相等，同位角相等，且同傍二内角之和等于两直角。

欧几里得在证明这个命题时，第一次用到第5公设。

命题47是西方所谓的毕达哥拉斯定理。欧几里得给出了证明，他的证法就是今天中学教科书常用的证法（图1.8）。该定

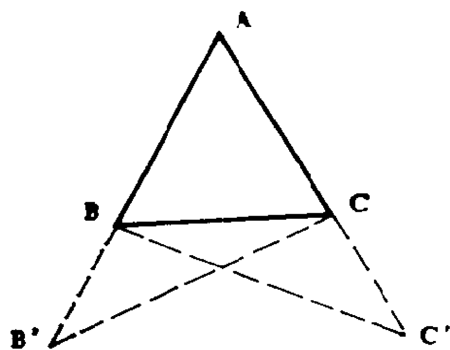
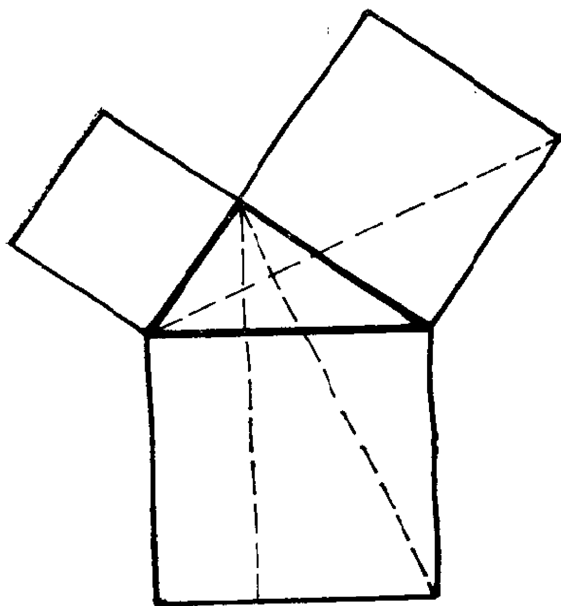


图1.7


图1.8

理的证法非常之多，鲁米斯在《毕达哥拉斯定理》（第二版）一书中就收集到370种证法，堪称数学证明之最。①

命题48是毕达哥拉斯定理的逆定理。

第2篇包括两个定义和14命题。其中前10个命题是用几何的形式解释代数恒等式。例如：

命题4是用图1.9表示恒等式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

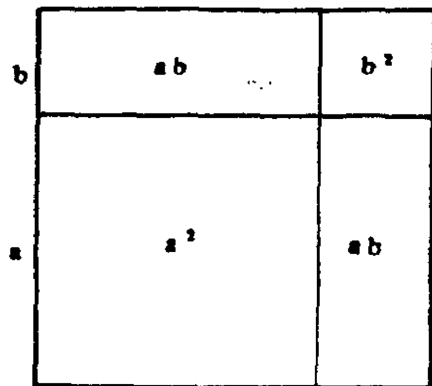


图 1.9

命题11是，在线段AB上求一点C，使

$$AB\cdot BC=AC^2$$

在历史上，也许由于求C点之不易而被披上神秘的外衣，被人称之为神圣比例或神圣分割，通常叫黄金分割。不难算出 $AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$，数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339\cdots$ 称黄金分割数，它在现代优选学中用到。

第3篇共37个命题，开头给出圆的定义，然后讨论弦、切线、圆心角和圆周角等等。

第4篇由7个定义和16个命题构成，讨论圆的内接和外切圆形，如三角形、正方形、正五边形、正六边形以及正十五边形等。

第5篇计有18个定义和25个命题，基本上是欧多克斯的比例理论。例如定义5用今天的符号表示就是：对于任意两个自然数m和n，如果

从 $ma<nb$ 推知 $mc<nd$，

从 $ma=nb$ 推知 $mc=nd$，

---

① 参见方金秋：《数学证明之最》，载1991年7日1日《北京晚报》。

从$ma>nb$　推知　$mc>nd$，

则有　$\frac{b}{a}=\frac{c}{d}$

为了了解本篇命题，我们选取几个，并用现在的符号表示。

命题1　$ma+mb+mc+\cdots=m(a+b+c+\cdots)$

命题4　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{ma}{mb}=\frac{mc}{ma}$

命题12　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，则$\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$

命题17　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

命题18　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

第6篇计有定义5个和命题33个，是将第5篇的比例理论用于研究相似形。例如：

定义1.如果两个直线形的对应角相等，且对应边成比例，则称这两个图形相似。

命题18.已知二线段a和b，求其比例中项。

命题27.在具有相同周长的四边形中，正方形的面积最大。

命题31.直角三角形斜边上的直边形，其面积为两直角边上两个与之相似的直边形面积之和。

第7、8、9三篇是几何形式的数论。

第7篇有22个定义和40个命题。欧几里得将a看成线段之长，$\sqrt{A}$看成是面积为A的正方形的边长，两数相乘为面，三数相乘为体；给出质数之定义（只能用单位度量之数），并把数看成单位的集合。在命题中有辗转相除法，并用其求最大公约数等。

第8篇共27个命题，在这一篇，欧几里得证明了平方等于2的分数不存在，当然是用几何形式表示的。

第9篇计有36个命题，其中命题20是所谓的“欧几里得定理”（即存在有无穷多个素数）。

第10篇是关于无理数的理论，包括4个定义和115个命题，是《原本》最难读的一篇。

命题1.对于两个不相等的量，若从较大量减去一个比它的一半还大的量，再从所余量减去大于其半的量，重复这一步骤，就能使所余的量小于原来较小的那个量。

欧几里得在证明这一命题时，不自觉地运用了较小的量自身相加足够多的次数后能超过较大量这一事实，它是命题1的等价命题，因而证明不够严格。由于欧多克斯与阿基米德都把命题1作为公理使用，所以今天称这一命题或其等价命题为“欧多克斯—阿基米德公理”。

第11—13篇是立体几何学内容。

第11篇共有31个定义和40个命题：给出了球、圆锥、圆柱以及五个正多面体等的定义；有关于空间的直线和直线、平面和平面以及直线和平面相互位置关系的命题。

第12篇由18个命题组成。主要是用欧多克斯的“穷竭法”计算一些立体的体积。例如：

命题1.圆内接相似多边形之比等于圆直径平方之比。

命题2.圆与圆之比等于其直径平方之比。

命题10.正圆锥是与其同底同高圆柱的三分之一。

命题18.球之比等于其直径的三次方之比。

第13篇也有18个命题，是关于正多面体的原理的。其中有作内接于球的四面体、立方体、八面体、十二面体以及二十面体等内容。

以上13篇共467个命题。

《原本》有的版本还有第14、15篇，并各有7个命题，是讨论多面体的性质以及一个多面体内接于另一个多面体的问题。一般

认为：第14篇是亚历山大的希普西克勒斯（约公元前150年）写的；第15篇是更后的叙利人达马萨斯（6世纪初）写的。

（3）对《几何原本》的简短评论。

欧几里得力图用严格的逻辑演绎方法整理当时已经积累起来的数学知识。《原本》先给出定义和公理，然后一步步地推导出有关定理。只要不是公理和公设，无论在直观上多么明显的命题，他都耐心地给予证明。综观全书，定理的编排也愈来愈复杂。《原本》构造了数学史上第一个公理系统。它的产生不仅标志数学知识系统化的开端，而且也开创了科学理论系统化的先河。自它问世以来，直到18世纪的两千多年的时间里，数学史上几乎能叫出名字的数学家都从这一著作中吸取了丰富的营养；有的数学家，就是以研究、注释、翻译和评注这一著作而著名。但是，直到19世纪初期，没有实质性的进展。牛顿的老师巴罗认为几何学有八个优点：概念清晰，定义明确，公理直观可靠且普遍成立，公设清楚可信且易于想象，公理数目少，引出量的方式易于接受，证明顺序自然，避免未知事物。因此，他把包括微积分在内的所有数学都试图用几何的形式叙述。在不少人看来，《原本》是严格的范本，甚至认为《原本》所使用的方法，不仅是建立几何学和整个数学体系的可靠方法，而且也是建立所有科学体系的可靠方法。比如，17世纪的唯理主义者斯宾诺莎曾经仿效这种方法，把人的思想、情感和欲望等当作几何学中的点、线、面来研究，写出他的名著《伦理学》。长期以来，《原本》作为数学教科书，在普及、传授数学知识方面起了重大作用。《原本》也曾被人们翻译成各种文字的版本，在各国发行。据说它的发行量仅次于西方世界的《圣经》。就是在数学高度发达的20世纪，若用现在的数学符号叙述，《原本》仍是一部很好的数学著作。所以欧几里得的名字，几乎被人看成是几何学的代名词。的确，在世界上，能被人推崇两千多年、而且影响又这么长久的著作是少有

的。由于《原本》系统而又相当全面地概括了在此以前的几何学（实际是整个数学）的成就，所以自它问世以后，它赖以产生的所有几何著作因相形见绌而先后失传。

另一方面，《原本》并不是在任何时期和任何地方都受到同样的重视的。它在罗马时期（公元前1世纪～5世纪）以及6世纪传入印度后，并没有引起当时、当地学者的兴趣。9世纪以后，学术中心移到阿拉伯地区，在这里希腊数学受到重视。《原本》得到相当广泛的研究和注释。阿拉伯人的研究和翻译，是《原本》能留传下来的重要原因。欧洲文艺复兴以后，新兴的资产阶级要求思想解放、摆脱宗教束缚，包括数学在内的希腊文化又重新引起人们的兴趣。研究《原本》的人多于历史上任何时期，也出现了一些别的文字的译本（如1570年的英文译本等）。19世纪以来，数学有了新的发展，更适合教学用的几何课本开始出现，一字不变地背诵《原本》的教学方法发生动摇。本世纪初期，首先在英国继之又在德国发生了很有声势的"改革运动"。英国教育家培里主张废除欧几里得的体系，而代之以"实验几何"，强调重视测量与近似计算。几乎同时，德国著名数学家F·克莱茵也对用《原本》作教材进行了批评，他说："欧几里得绝不是为孩子们写的这本书。"《原本》的前6篇的翻译者之一徐光启曾对这一全新的数学体系大为赞赏，认为它可以"发其巧思"、"练其精心"，认为"举世无一人不当学"，而且预言"百年以后必人人习之"。《原本》传入我国，虽然有个别数学家进行研究，但其影响并不像徐光启预言的那样大。

欧几里得给当时的一切数学都穿上几何的外衣，但是用几何方式表示非几何的内容的结果，必然影响、甚至限制了这些数学的发展。比如，在欧几里得看来，不仅超过三次方的代数式没有意义，而且三次方以下的任何非齐次的代数式也没有意义。

今天看来，《原本》本身并不是无懈可击的，甚至中学生也

能挑剔出它的不足。全书13篇前后重复之处不少，比如第7、8、9三篇与第5篇有不少重复，第13篇中的某些内容同第2、4篇也有些重复等。《原本》虽然系统而又相当全面地概括了在此以前几何学的成就，但是，当时盛行的几何三大难题并没有在《原本》中反映出来，也许由于“没有解决”所以没有收入。另外，也有些问题没有收入，比如没有命题“三角形的三个高交于一点”等。

在逻辑体系上，《原本》的主要缺陷是：没有最基本的概念；许多定义含混，容易发生歧义；有的公设多余，特别是缺运动公理、顺序公理和位置公理。这些我们将在3.2节中介绍。

4.《圆锥曲线》的意义

《圆锥曲线》是希腊后期几何学家阿波罗尼的主要数学著作。他出生在小亚细亚西北部的城市拍加（Perga），而学术生涯主要在亚历山大城渡过。他向欧几里得的门徒们学习数学，之后，用严格的演绎法写出《圆锥曲线》。该书共分八篇，共计487个命题，可见它的规模并不次于《原本》。它的前四篇于12～13世纪时传到欧洲；后三篇先传到阿拉伯，被译成阿拉伯文，1290年由阿拉伯传入欧洲；最后一篇已经失传。今天解析几何中关于圆锥曲线的性质在《圆锥曲线》中差不多都有了。

在希腊前期，梅内克缪斯曾用一个分别垂直于三种正圆锥的母线的平面切割圆锥，得到三种圆锥曲线，并分别命名为锐角圆锥曲线、钝角圆锥曲线和直角圆锥曲线。欧几里得和阿基米德等又有所进步——知道从其它两种圆锥上也能割出椭圆，阿基米德也许还知道在斜圆锥上能割出三种圆锥曲线。

阿波罗尼第一个明确地认识到在同一个锥面上（正的或斜的）可割出三种曲线，并按它们的某些几何性质分别称为“齐曲线”、“亏曲线”和“超曲线”，同时引入抛物线、椭圆和双曲线的名称，分别代替了齐曲线、亏曲线和超曲线，也代替了梅内克缪斯

的直角、锐角、钝角圆锥曲线（在阿基米德的著作中如《抛物线求积》等，也出现过抛物线与椭圆的名称，据研究，这是后人抄录时改过来的）。阿波罗尼第一次认识到双曲线有两个分支。他对圆锥曲线理论进行了相当全面的研究，他的研究成果《圆锥曲线》被誉为“希腊几何学之冠”。

阿波罗尼还是一位著名的天文学家。他所提出的宇宙模型基本上就是后来所谓的“托勒密宇宙模型”。

阿波罗尼的圆锥曲线理论是纯粹的几何理论，顶多同一些简单的光学事实（如入射角与折射角相等之类）有联系，但是到了16世纪前后，这个理论对天文学和天体力学的发展却产生了意想不到的作用。

在古希腊已有地心说与日心说，但都是建立在直观基础上的宇宙模型,都没有科学根据。在相当长的时期里，地心说因被宗教利用而占有优势。后来,哥白尼的日心说取代了地心说。但在哥白尼的理论中，假定行星绕日作等速圆周运动，这个假定并不精确。开普勒根据丹麦天文学家第谷·布拉赫长期观测火星的记录，总结出行星运动三定律：行星运行的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆；单位时间扫过的面积相等；运行的周期和轴长的3／2次方成正比。科学史称开普勒为“天空立法者”。如果没有古希腊的圆锥曲线理论，如果开普勒根本不知道椭圆概念，更不知道它的有关性质，那么这三个定律是总结不出来的。从圆锥曲线理论的产生，到它以后在天文学上找到应用，中间经过了大约1800年。

我们知道，现代物理学赖以发展的重要基础是牛顿力学。而牛顿力学的核心除牛顿运动三定律外还有引力理论，即引力的平方反比定律：$F=\frac{km_1m_2}{r^2}$。这个公式的来源就是开普勒的行星运动三定律。牛顿所作的工作是把由地球的引力作用而产生的直

线运动，和由太阳的引力作用而产生的椭圆运动统一起来，把两个表面上不同的现象联系起来，找到了共同的规律，并把这个规律定量的表示了出来。引力的平方反比定律的得出，说明圆锥曲线理论在牛顿力学中起了重要作用。

欧几里得和阿波罗尼用严格的演绎法写出了早期数学巨著：《几何原本》和《圆锥曲线》。但这不等于说数学家依靠演绎推理来搞数学的发明创造。事实上，希腊后期，对于从简单的演绎法得出的命题有点看不起，他们把那些能从定理直接推出的结果称为“系”或“衍论”。普罗克洛斯把这种不花力气得出的结果称为“横财”或“红利”，有贬义的味道。这些反映了数学家重视实际的朴素唯物主义的思想。在数学发展的历史上，归纳和演绎、分析和综合之间的辩证关系体现得十分突出。恩格斯说：“归纳和演绎，正如分析和综合一样，是必然相互联系着的。不应当牺牲一个而把另一个捧到天上去，应当把每一个都用到该用的地方，而要做到这一点，就只有注意它们的相互联系，它们的相互补充。”① 这一点就连现代美国数学史家M.克莱因也是承认的，他说：“回顾欧几里得之前三百年间的数学活动，就应该看到证明之前先有猜想，综合之前必先有分析。”②

1.3 芝诺悖论及其影响

1.芝诺悖论的产生

在科学史所记载的形形色色的悖论中，芝诺悖论（又称“芝诺疑难”）是最早的，它对西方哲学和数学思想的发展有着一定的影响（悖论概念请参看4.5节）。

芝诺（公元前5世纪）是古希腊埃利亚学派的代表人物。哲

① 恩格斯：《自然辩证法》，第206页。

② M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第112页。

学史往往把他的悖论同当时已经流行的“说谎者悖论”一起视为“诡辩”（亦称“巧辩”）。由于芝诺并不是一位科学家，更谈不上是数学家，所以他的悖论也常被科学史和数学史忽视。也有人把它看成是当时社会上有闲阶级编造出来的“智力游戏”，如法国现代数学家P.莱维说：“芝诺提出这些悖论，可能只不过是为了考一考他的学生的智力。”①今天看来，不能排除“诡辩论”和“游戏论”的可能性，但芝诺的四个悖论的产生有其社会历史背景，对后世影响广泛，意义深远。

在公元前5世纪前后的200多年内，希腊社会民主气氛浓厚，人们思想活跃，学派众多，形成希腊科学文化的繁荣时代，也是西方科学发展的第一个黄金时代。希腊民族笃信众神创造并主宰世界的神话。但是神用什么“原料”把世界创造出来呢？在希腊神话的摇篮里成长起来的思想家们，在这些神话的基础上对世界的本原问题作了种种朴素的、自然主义的解释，比如有的说是“火”，有的说是“水”，也有的说是“气”等等。然而这些思想家并没有想到，他们的回答实际上是自相矛盾的。因为他们所谓的“本原”本身是永恒存在的，在这个意义说，“本原”是永远不会发展变化的。但是如果进一步分析，这些“本原”（例如赫拉克利特所说的“火”）又是不断发展变化的，否则就不可能有复杂多样的世界。“本原”既永恒又发展、既不变又变化，可见这些学说本身蕴含着悖论性。

埃利亚学派的创始人巴门尼德继承并发展了他的先驱色诺芬尼的一神论思想。他在回答世界本原问题时认为只有“存在”（＝神）是不生不灭的，它是完整、唯一和不动的②。世界明明是复杂纷繁的，怎么能是“唯一”的呢？一个完全“不动”的世

① 转引自H·Φ·奥夫钦尼科夫：《悖论及其在科学思想史上的作用》，载《科学与哲学》1983年第4期，第91页。

② 《古希腊罗马哲学》，三联书店1957年版，第52页。

界怎么可能呢？可见巴门尼德的“存在”也含有悖论性，从而引起同时代人的反驳。

巴门尼德的继承人芝诺为他的老师的学说辩护。他力图证明，如果承认“多”和“运动”，就会招致“更加可笑的后果”，陷入更大的矛盾。为了反驳反对者，芝诺曾列举了大量的论据，这些论据既是为老师学说辩护，又是对反对者的挑战。在芝诺的论证中，如下四个是最著名的，人们称之为“芝诺悖论”。

（1）二分法。“你不能在有限的时间内越过无穷的点。在你穿过一定距离的全部之前，你必须穿过这个距离的一半。这样做下去就会陷于无止境，所以，在任何一定的空间中都有无穷个点，你不能在有限时间中一个一个接触无穷个点。”

（2）阿基里斯追龟。“阿基里斯永远追不上乌龟。他首先必须到达乌龟出发的地点。这时候乌龟会向前走了一段路。于是阿基里斯又必须赶上这段路，而乌龟又会向前走了一段路。他总是愈追愈近，但是始终追不上它。”

（3）飞箭。“飞着的箭是静止的。因为，每一件东西在占据一个与它自身相等的空间时是静止的，而飞着的东西在任何一定的霎间总是占据一个与它自身相等的空间，那么它就不能动了。”

（4）运动场。“一半的时间可以等于一倍的时间。我们可以假定三列物体，其中一列（A），当其它二列（B,C）以相等的速度向相反的方向运动时，是静止的（左图）。在它们都走过同样的一段距离的时间中，B越过C列中物体的数目，要比它越过A列中物体的数目多一倍（右图）。因此，它用来越过C的时间要比它用来越过A的时间长一倍。但是B和C用来走到A的位置的时间却是相等的。所以一倍

的时间等于一半的时间。”①



左图　　　　右图

芝诺本人是如何阐述这四个悖论的，今天已无从查考。现在所看到的各种引文，都是出自亚里士多德的《物理学》。亚里士多德引述他的话的目的是为了批判，有些地方的文字并不十分精确，似乎缺乏说服力。

2.芝诺悖论的哲学意义

时间与空间问题自古以来是哲学中重要问题之一。古希腊的思想家在这个问题上实际有两种对立的观点。一种观点认为，时间和空间都是可以无限分割的，从而运动是连续的。赫拉克利特最早提出这一见解，并提出“一切皆流，无物常住”，“我们走下而又不走下同一条河，我们存在而又不存在”②等著名论断。另一种观点则认为，时间和空间都是由一种不能再分的原子构成的，从而运动是间断的，是一系列小的跳动，犹如今天电影画面的构成一样。

如果我们把芝诺的悖论同上述两派对立的时空观加以对照就可以看出，“二分法”和“阿基里斯追龟”在客观上是对时空能无限分割观点的质疑，也是对潜无限的质疑。因为只有在能无限分割的条件下，才有“你不能在有限的时间内越过无穷多个点”（二分法）和善跑的“阿基里斯永远追不上乌龟”（阿基里斯追龟）的结论。亚里士多德认为，时间和空间都是连续的，他明确指出，“他（芝诺——引者注）主张一个事物不可能在有限的时间里通过无限的事物，或者分别地和无限的事物相接触”的论证

---

① 《古希腊罗马哲学》，三联书店1957年版，第57—58页。

② 同上书，第17、23页。

是错误的。①相传古希腊犬儒学派的第欧根尼·拉尔修曾针对芝诺的“二分法”一声不响地走来走去，这无疑是一种批判，不过恐怕也有在道理上说不清楚的苦衷。实际上包括芝诺在内的所有人都清楚，只要人们一举步，不管步子多么小，都可以在有限的时间内越过无穷多个点；任何头脑正常的人对善跑的阿基里斯能够追上乌龟也是不会怀疑的。人们认为，芝诺的真意在于用结论的荒谬性来否定其前提即对时空能无限分割的观点。

芝诺的“飞矢”与“运动场”在客观上是对时空不能无限分割即原子论观点的质疑，也是对实无限的质疑。因为当你只承认运动就像电影画面的构成一样是一系列小的跳跃时，飞矢在一瞬间就是“静止”的了。根据反证法，结论的荒谬说明其前提即不能无限分割观点是错误的。在“运动场”中，“一半的时间可以等于一倍的时间”的结论说明，作为不能再分的时间原子又可以等于它的一半，于是时间原子又成为可以再分的了，从而说明原子论学说本身是矛盾的。

这样，芝诺通过四个悖论既反对了时空能无限分割的观点，又反对了时空不能无限分割的观点。对此，古希腊的历史学家普罗塔克曾有如下的诗句：

大哉芝诺，鼓舌如簧；

无论你说什么，他总认为荒唐。②

恩格斯曾经指出：“运动本身就是矛盾；甚至简单的机械的位移之所以能够实现，也只是因为物体在同一瞬间既在一个地方又在另一个地方，既在同一个地方又不在同一个地方。这种矛盾的连续产生和同时解决正好就是运动。”③古希腊的思想家们，当然无力提出关于运动的科学见解，不管芝诺的原意如何，这四

---

① 亚里士多德：《物理学》，商务印书馆1982年版，第168页。

② 转引自B.波耶：《微积分概念史》，上海人民出版社1977年版，第27页。

③ 恩格斯：《反杜林论》，第117页。

个悖论在客观上向人们指出，任何孤立地强调“能无限分割”或“不能无限分割”的观点都是片面的，都将陷入不可克服的矛盾。可见，芝诺悖论在客观上促进人们对运动本质进行思考，达到对运动的正确理解。

不仅如此，芝诺悖论还促使人们对自己思维的反思。在人类认识史上，芝诺悖论是人们最初用一种确定的逻辑思维形式去把握变化着的感性世界时所产生的悖论，所以，芝诺悖论也揭示出思维本身的特殊性，它使人们清楚地认识到思维（意识）和存在（物质）之间不能简单地划等号，甚至完全相悖，从而推动了人们对其间关系即哲学基本问题的思考。

3.芝诺悖论对数学思想的影响

芝诺悖论也促进了以严格的思维规律为研究对象的逻辑学和以严格的求证思想为基础的数学的发展。芝诺悖论的矛头虽然不是针对数学，对当时的数学也没有构成威胁，但对数学的发展却产生了重要的影响。比如，芝诺论证问题时所使用的方法就是今天数学中的反证法，这大概是有文字记载的对反证法的最早的运用。直到今天反证法仍是数学基本方法之一，每当一个数学命题不能直接证明时，数学家就求助于它。再如，芝诺的“二分法”和“阿基里斯追龟”所反映的思想，也是西方最早的潜无穷思想之一，在这一思想基础上，相继产生了以安提丰为代表的“割圆术”和以欧多克斯、阿基米德为代表的“穷竭法”，从而为现代数学中的极限论的产生作了准备，具有广泛应用的微积分就是用极限论建立起来的数学体系。

今天只要有一点微积分知识的人都知道，芝诺“二分法”的实质问题是无穷多个无穷小之和究竟是什么，芝诺坚信：如果无穷小为非零之数（ε），则无穷多个无穷小之和应为无穷大（即$\varepsilon\times\infty=\infty$）；如果无穷小为零，则无穷多个无穷小之和亦为零（即$0\times\infty=0$）。今天微积分中的“洛必大法则”告诉我们，

对无穷小与无穷大之积的极限应作具体分析，它随问题的不同而得不同的结果：既可以是零，也可以是无穷大，还可以是各种有限的实数。总之对同一个问题绝不可能既可为零又可为无穷大。同样，“阿基里斯追龟”问题完全是无穷级数求和问题。设善跑的阿基里斯的速度比乌龟快n（n>1)倍，则得一个以1/n为公比的几何级数，容易算出它的和是一个有限的常数，只要阿基里斯跑完这段距离自然就追上了乌龟。“飞矢”问题是微积分中典型的导数问题，运动着的物体在每一瞬间不仅有确定的速度，而且还有确定的加速度等。既有速度和加速度，当然，“飞矢不动”就不能成立。“运动场”问题显然同运动的方向即同正负概念有关。退一步，若按芝诺的逻辑就得出“一半的时间等于一倍的时间”的结论，而对一个无穷集合来说，这个结论也不难理解，因为无穷集合的重要特点之一就是“部分可以等于全体”。

但是在公元前5世纪前后的古希腊，人们只有正整数概念，顶多再加上一些正的分数概念，既没有负数和无理数概念，也没有无穷集合概念，更没有微积分中的导数概念，所以在微积分产生以前的两千多年的时间内，芝诺悖论成了无法解决的“疑难”（希腊文的原意为“无路可走”，转义为“无法解决的问题”）。“疑难”是对一定的条件而言的，解决问题的条件具备了就不成其为“疑难”了。在数学发展的历史上，人们对芝诺悖论的思考，是17世纪变量数学产生的动力之一。变量数学中的极限理论和无穷级数理论的产生和发展，人们按收敛的无穷级数能够求和的观点给出芝诺悖论的逻辑和数学解释。但是，人们又在芝诺悖论的基础上提出如下的“抛球问题”。

4.芝诺悖论的引申——抛球问题

该问题是：设A、B二人将一球互相传递，假定经过的时间（分钟）依次为$1/2$、$1/2^2$、$1/2^3$、…、$1/2^n$、…（$n=1, 2, 3, \cdots$），而球轮流落在A和B手中。现在问，当时间

恰到一分钟时，该球落在谁的手中？

记 $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} (n=1,2,3,\cdots)$，则在各时刻$s_{2n-1}$，球总是在B的手中；而在时刻$s_{2n}$，球总是在A的手中。由于$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1$，可见恰到一分钟时，既可以说球在A手中，也可以说球在B手中，形成悖论。

对这个问题，潜无穷论者由于不承认无穷过程能进行完毕，即球无休止地往复下去，从而可以避而不答。但实无穷论者由于承认无穷过程能进行完毕，所以无法回避，但又无法回答。我国数学家徐利治根据他所提出的“双相无限”的理论，认为当时间恰到一分钟时，球落在A、B手中各无限多次。这一答案虽然有些奇怪，但是按照现代非标准分析的思想并不难理解。

毕达哥拉斯曾误以为有理数同数轴上的点一一对应。后来产生无理数，从而建立了实数概念。人们长期以来又把实数看成同数轴上的点是一一对应的。这一思想基于点不可分且没有内部结构这样一条公理。本世纪60年代产生的非标准分析把实数域R扩大到非标准数域*R。*R的几何解释是：第一，实数点是可分的，即在实数点的“内部”凝聚着数不清的小的点；第二，在数轴的两端即无限远点，同样凝聚着数不清的坐标为无限大的小点。还可以设想在每个小点的“内部”凝聚着数不清的更小的点等。这样的数轴无妨称之为非标准数轴。因此，当抛球时间恰到一分钟时，更确切地说当抛球恰到标准时间一分钟时，球落在A、B手中各无限多次。

1.4 极限法的早期形式

极限法的早期形式是指割圆术和穷竭法。计算图形的面积和体积是几何学产生的基本原因，也是几何学主要内容之一。割圆

术和穷竭法是古代计算某些特殊曲线所围成的图形的面积常用的方法。

1.割圆术

古希腊的智者派中相当一批人对几何三大难题很感兴趣。安提丰在研究“化圆为方”问题时受到启发，认为用圆的内接正方形的边数逐渐加倍的办法可求出圆的面积，提出了把圆看成无穷正多边形的思想。几乎同时，布赖森提出通过圆的外切正多边形的面积来求圆面积的思想；他还认为，圆的面积可以取作边数充分大时它的内接与外切正多边形面积的平均值。这是计算圆面积的最早设想，也是西方最早的“割圆术”，不过没有见到他们的具体计算。

中国在公元前6世纪前后已有按耕地面积征税的制度，所以计算面积是中国数学的重要组成部分。在中国古典数学名著《九章算术》一书中，就有关于方田（矩形）、圆田（圆形）、环田（圆环形）、弧田（弓形）和宛田（球冠形）等图形面积的计算；也有关于堑堵（上下底是全等的直角三角形的正柱体）、阳马（底为长方形，且一棱与底垂直的锥体）、鳖臑（四面都是直角三角形的四面体或一般的四面体）、方锥（正四棱锥）、圆锥（正圆锥）、圆亭（正圆台）、方亭（正四棱台）、刍童（上下底为长方形的台体）、刍甍（上底为直线的刍童）以及羡除（三个侧面为不同的等腰梯形，其它两个侧面为三角形的楔形）等体积的计算。此外，在公元前4世纪的著作《庄子·天下篇》中记有不少的极限思想，其中最著名的是：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”3世纪时的数学家刘徽在注解《九章算术》的“方田章圆田术”中，第一次把《庄子》的极限思想应用于计算圆的面积。刘徽肯定圆内接正六边形的面积随边数不断加倍而不断增加，但永远不会大于圆的面积；同时又指出，“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至不可割，则与圆合体而无所失矣。”这同现

代微积分中的定理："单调有界变量的极限一定存在"完全一致。

令S、S_n、S_{2n}分别表示圆、圆内接正n边形和圆内接正2n边形的面积，刘徽建立了不等式

$$S_{2n}<S<2S_{2n}-S_n \tag{A}$$

和等式

$$S_{2n}=\frac{1}{2}na_nr \tag{B}$$

式中r表示圆的半径，a_n表示S_n的一边之长。

刘徽令$r=1$，并用勾股定理算出（取小数后六位数字）：

$$a_{48}=0.130806,\quad a_{96}=0.065438。$$

应用（B）式得出：

$$S_{96}=3.13\frac{5.84}{625},\quad S_{192}=3.14\frac{0.64}{625}。$$

再由（A）式得出：

$$3.14\frac{0.64}{625}<S<3.14\frac{1.69}{625}。$$

为了应用方便，刘徽"弃其余分"（弃去分数部分），再注意$r=1$，于是得出

$$\pi=3.14=\frac{157}{50}。$$

根据"圆田术"的注文，继续算下去可得$\pi=3927/1250$，化成十进小数就是3.1416。注文还说，只要求得圆的内接正3072边形的面积，便可得到这个数值。经验算，这个结论是正确的。

数学史把以刘徽为代表计算圆面积的方法称为"割圆术"。

我国元代天文、数学家赵友钦的割圆术是很出色的。他所著的《革象新书》是一部天文学著作，全书五卷，最末一卷是"乾象周髀"。在该卷，他对古代已有的圆周率的近似值如3、157/50，22/7和355/113用割圆术方法进行了比较。他取圆的直径为

1000寸，所用的原理与刘徽一样，不同的是他同西方的安提丰、欧几里得一样，从圆的内接正方形算起。他指出，“其初之小方（指正方形），渐加渐展，渐满渐实。角数愈多而其为方者不复为方而为圆矣。”因此，他让边数不断加倍，并依次算出各内接正多边形的周长，一直算到$4\times2^{12}=16384$边形，得出周长为“三千一百四十一寸五分九厘二毫有奇”。即得出3.141592这一圆周率不足近似值，从而证明了$\frac{355}{113}$是四个圆周率的近似数中最为精密的一个。赵友钦接着指出，从“一、二次求至一十二次，可谓极其精密。若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”。这就是说，还可以继续求得更为精密圆周率值，永无止境。“终不穷”的认识比之刘徽的“不可割”以及“与圆合体而无所失”的认识更为深刻。

2.穷竭法

欧多克斯提出的方法比安提丰和布赖森的割圆术思想有了重要的发展。这个方法被欧几里得记述在《几何原本》的第十二篇中，用现代的符号表示实际上就是：如果对于任意的正整数n，等式$a_n/b_n=k$（常数）成立，且当$n\to\infty$时，如果$a_n\to A$，$b_n\to B$，则有$A/B=k$。欧多克斯用这个方法证明了两圆面积之比等于其半径平方之比，两球体积之比等于其半径立方之比，以及棱锥和圆锥的体积分别是其同底同高的棱柱和圆柱体积的三分之一等数学命题。

欧几里得在应用这一方法时用了反证法。例如，他对命题“两圆面积之比等于其直径平方之比”的证明，用今天的符号叙述大致如下。

设半径为a、b的两圆面积分别为A、B，并用A_n和B_n分别表示两圆内接正n边形的面积（图1.10），欧几里得依次证明了

$$A-A_4<\frac{1}{2}A,\ A-A_8<\frac{1}{4}A,\ A-A_{16}<\frac{1}{8}A。$$

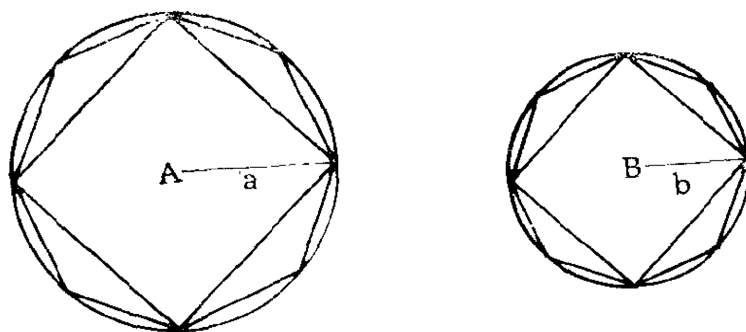


图 1.10

这样继续下去，差值$A-A_n$随n的无限增加而无限地小，也就是说，圆面积A被边数愈来愈多的内接正多边形的面积所穷尽。同理，当n无限增加时，圆面积B能被B_n所穷尽。由于欧几里得已经证明$A_n/B_n=a^2/b^2$，所以$A/B=a^2/b^2$。最后这一步并不是采用极限过程得到的。为了论证结论的正确，欧几里得用反证法进行证明（这是他的发展）：先设$A/B\neq a^2/b^2$，而B′能使$A/B'=a^2/b^2$，他证得当$B'<B$与$B'>B$时都同原设矛盾。

继欧几里得之后，阿基米德对欧多克斯的方法作了重要的发展，主要是在使用这一方法时用了现代积分学中的“大和”与“小和”概念。他在《圆的度量》这部著作中，从计算圆的内接与外切正六边形的周长算起，直算到96边形的周长，得出著名不等式

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

阿基米德在《论螺线》这一著作中，计算了现在以他的名字命名的曲线$\rho=a\theta$（$a>0$）第一周的面积A（图1.11中的阴影部分）。他的方法用现在的符号来叙大致如下：

先把2π等分为n个角（在图1.12中，$n=12$），得到顶角为$\frac{2\pi}{n}$的n个内接扇形和外切扇形，设其面积之和分别为s_n和S_n，则有不等式

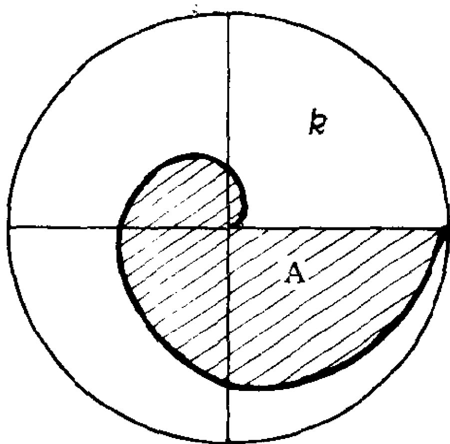


图 1.11

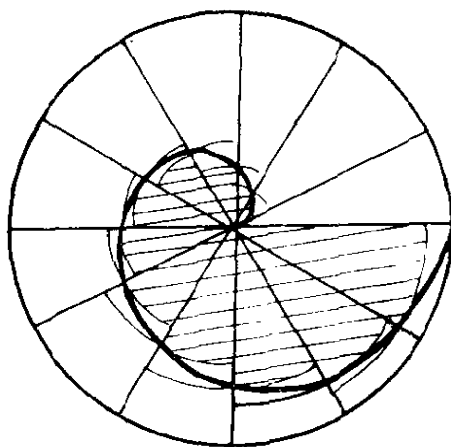


图1.12

$$s_n < A < S_n$$

经计算

$$s_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$$

$$S_n = \frac{4}{3}\pi^3 a^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

式中$4\pi^3a^2$是半径为$2\pi a$的圆的面积，令其为k，阿基米德认为

$$A = \frac{1}{3}k$$

最后这一步也不是用极限步骤得到的，而有猜想的成分。所以他同欧几里得一样，再用反证法证明，因而在逻辑上是严格的。

阿基米德还在《论球和圆柱》、《抛物线的求积》以及《方法》等著作中，用这样的方法算出了圆的面积、球的体积和表面积、抛物线弓形的面积以及一些旋转体的体积等许多相当难的数学问题。

西方在17世纪时把欧多克斯和阿基米德提出的计算某些图形面积的方法称为“穷竭法”。

以刘徽为代表的割圆术和以阿基米德为代表的穷竭法思想完全一致，都相当典型的体现了相对和绝对、有限和无限之间的辩证关系。但是在具体应用时有所不同。以计算圆周率π为例，虽然

阿基米德和刘徽都是从正六边形算起，但有所不同：第一，前者用了内接与外切正多边形，而后者只用内接正多边形；前者在计算时用到勾股定理、相似三角形的性质与三角形分角线的性质等，而后者只用勾股定理。第二，在取值的范围上，只要正多边形的边数相同，刘徽不等式的上下界之差恒比阿基米德的上下界之差小。所以在计算圆面积和圆周长的问题上，刘徽的割圆术比阿基米德的穷竭法优越。但是刘徽的割圆术应用范围较小，且主要是“算”；穷竭法不仅有“算”有“证”，而且应用范围较广，所以穷竭法也有其优越性。

但是在古代，由于没有引入变量概念，也没有完整的符号系统，无论是割圆术，还是穷竭法，都以几何的形式出现，所以这两种方法的使用极为不便。因此，在16世纪前后，为适应计算曲边图形的面积和体积、曲线的长度以及物体重心等许多“求积问题”的需要，数学家在改进穷竭法的同时，提出了种种计算求积问题的方法，卡瓦列利的“不可分元法”就是其中之一。17世纪后半期，牛顿和莱布尼茨微积分的产生，特别是19世纪20年代柯西把微积分建立在极限论的基础之上，以及黎曼积分产生以后，割圆术与穷竭法随之被现代的积分法代替。

1.5 古希腊的数学哲学

古希腊的思想家如泰勒斯、毕达哥拉斯、德谟克利特、亚里斯多德、柏拉图以及他们的门徒，不是对数学的发展有过卓越的贡献，就是对数学表现出极大的热情。由于他们的工作和影响，使数学有了重大发展，并产生了严密的逻辑体系。与此同时，还产生了一个重要的观点：数学是绝对真理。比如，几何学是空间关系的真理，算术是数量关系的真理。这些思想家围绕世界本原问题提出了种种学说，并长期争论。这种争论在数学中的直接反

映是关于数学研究对象的实在性的争论，主要表现在柏拉图和亚里士多德所持的相反观点。这个问题也是现代数学哲学中关于数学本体论问题争论的渊源。

下面简单介绍三个主要学派在数学观上的观点。

1.毕达哥拉斯学派的“数是万物的本原论”

毕达哥拉斯同我国的孔子和印度的释迦牟尼大致生活在同一时代。他曾在埃及居住了近22年，从埃及神庙的祭司那里了解到埃及的数学和天文学知识。回国以后建立了以他的名字命名的学派。他们发现，许多事物和现象都可以用数量进行解释。例如，两根绷得一样紧的弦，当长度之比为2∶1时，就会发出差八度的谐音；如果弦长之比为3∶2，则短弦发出之音比长弦发出之音高五度。据说这一发现对他们影响很大。他们综合对周围其它事物的观察，认为抓住了世界的奥秘，这就是，世界上一切事物和现象都可以并且只能通过数得到解释：宇宙的和谐根源于数的和谐，也就是说宇宙的本质是数。亚里斯多德评论说：“毕达哥拉斯学派曾经从事数学研究，并且第一个推进了这一个知识部门。他们把全部时间用在这种研究上，进而认为数学的始基就是一切存在物的始基。”①

他们从这一信念出发，努力从事数学的研究。但是，他们研究数学的目的，并不在于发现数学规律，推动数学发展，而主要是希望揭示数学规律的“普遍涵义”，也就是试图用数对客观事物作出解释。比如，该学派的成员菲罗洛斯曾说：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物本身或其与别的事物的关系都不能为人所清楚了解……你不仅可以在鬼神的事务上，而且在人间的一切行动和思想上乃至在一切行业和音乐上看到数的力量。”②

---

① 《古希腊罗马哲学》，第37页。

② 转引自M.克莱因，《古今数学思想》第1册，第168页。

因此，人们称这个学派的哲学为“唯数论”哲学。

作为“唯数论”哲学的逻辑结果，他们提出了“数是万物的本原”的世界本原论。如何从数产生出万事万物呢？毕达哥拉斯学派认为：“万物的始基是一元。从一元产生出二元，二元是属于一元的不定的质料，一元则是原因。从完满的一元与不定的二元中产生出各种数目；从数目产生出点；从点产生出线；从线产生出平面；从平面产生出立体；从立体产生出感觉所及的一切物体，产生出四种元素：水、火、土、空气。这四种元素以各种不同的方式互相转化，于是创造出有生命的、精神的、球形的世界，以地为中心，地也是球形的，在地面上住着人。”① 如亚里士多德所说：“由于他们在数目中间见到了各种各类和谐的特性与比例，而一切其它事物就其整个本性说都是以数目为范型的，而数目本身则先于自然界中的一切其他事物，所以他们从这一切进行推论，认为数目的基本元素就是一切存在物的基本元素，认为整个的天就是一个和谐，一个数目。”② 毕达哥拉斯学派实际上把“1”放在造物主的地位。这种“万物皆数”的观点是“唯数论”的集中表现。

不难看出，该学派“唯数论”观点的得出是纯粹“先入为主”的主观主义的表现。宇宙之大，事物之纷繁复杂，是不能从几个简单事例归纳出的结论所能覆盖和反映的。不仅如此，这个观点还是牵强附会的、具有浓厚的神秘色彩。比如，他们把奇数看成阳性，把偶然看成阴性，1是理性，2是意见，4是正义，5是婚姻，8是爱情，10是完美，等等。这是人类文明早期由于认识上的局限性而产生的幼稚见解。这一观点不仅影响了柏拉图的数学思想，而且也影响了16～18世纪的数学思想，甚至在现在

---

① 《古希腊罗马哲学》，第34页。

② 同上书，第37页。

数学思想中也有其痕迹。

2.柏拉图学派的“数学实在论”

柏拉图是古希腊唯心主义的代表人物，他的数学哲学不仅在16世纪前后，而且在今天仍有重要的影响。

柏拉图学说的核心是“理念论”。这种理论认为存在着“两种世界”：经验世界和理念世界。前者是变化的、复合的、不真实的，而后者则是永恒的、唯一的、真实的。在两个世界的关系问题上，柏拉图认为，理念世界高于经验世界，理念世界是原型，而经验世界则是其“不完善的摹本（影子）”。

数学发展到柏拉图时代已经相当发达，它的正确性、逻辑的严密性已被哲学家所接受；它的绝对真理性已成定论。当时“不懂数学的人”同“不懂哲学的人”几乎是同义语。“不懂几何学（数学）的人不准入内”，表示了柏拉图对数学的高度欣赏和重视。但是，柏拉图认为，数学知识是先验的。他曾将知识比之为鸟，探求知识犹如捕鸟入笼；因为鸟已经存在，只要去抓就是了。① 柏拉图学派的成员为了使他们的学说更加严密、完整，他们根据老师的思想对数学进行了广泛的研究。“公元前 4 世纪时几乎所有重要的数学工作都是柏拉图的朋友和学生搞的。”② 比如，该学派成员之一梅内克缪斯最早对圆锥曲线进行了研究，发现了圆锥曲线的三种形式，对立方倍积问题提出了特殊的解法等，显示了这一学派对数学的重视和研究水平。据研究，关于几何对象的实在性问题的分析是产生理念论的主要源泉之一。

在理念世界同数学的关系问题上有两种分析方法。一种分析是：既然柏拉图同毕达哥拉斯学派一样，认为数学命题是绝对真

---

① 参见柏拉图：《泰阿泰德·智术之师》，商务印书馆1963年版，第99—102页。

② M.克莱因：《古今数学思想》第1册，第49页。

理，因此，按他的“两种世界”的理论，数学是关于理念世界的知识，数学对象就是理念世界中的存在。所以说，柏拉图在数学本体论问题上采取了实在论的立场。也就是说，数学对象是一种独立的、不依赖人类的思维的客观存在。这种实在论是柏拉图数学哲学的核心。需要说明的是，柏拉图的上述观点同毕达哥拉斯学派的观点有所不同。因为毕达哥拉斯虽然认为数是万物的本原，但是他们认为数并不同具体的事物相脱离。因此，两个学派的区别是：毕达哥拉斯学派认为，数学对象存在于独立的可感事物之中；柏拉图则认为，数学对象独立存在于可感事物之外。

另一种分析是亚里士多德的观点。他说：“除去感性事物和形式（即理念）以外，他（指柏拉图）认为还存在有数学的对象，它们占据有中介的地位。数学对象与感性事物的不同在于它们有永恒性和不变性；它们与形式的区别（虽然两者之间有很多相似处）在于：形式在任何时候都是单一的。”①这就是说，柏拉图虽然把数学对象说成是理念世界中的存在，但柏拉图并不认为数学对象就是理念，而认为它们是理念世界与经验世界之间的“中介对象”。也就是说，数学认识具有一种“桥梁”作用，它能引起人的灵魂对“先天知识”的回忆。如柏拉图所说，学了几何学就能把人引入认识“善”这个理念，“几何会把灵魂引向真理，产生哲学精神……”。②例如，作为几何学（即数学）中的圆，既不同于理念世界中理念的圆，又不同于经验世界中的圆形事物。圆形事物中的圆是理念的圆的不完善的摹写，而数学中的圆则是理念的圆的完善的摹写。进而产生“普通几何学”与“哲学几何学”的区分：前者以数学的圆等概念为研究对象，而后者

---

① 转引自夏基松、郑毓信，《西方数学哲学》，人民出版社1986年版，第11页。

② 转引自M.克莱因，《古今数学思想》第1册，第172页。

则以理念的圆等概念为研究对象。

以上两种分析虽然不同，但是在数学不属于经验世界这一点上完全相同。柏拉图的继承人如芝诺克拉底和斯潘雪浦等，干脆把“数学的圆”和“理念的圆”等概念看成是同一的，从而认为数学对象就是理念世界。于是，这时期柏拉图的“理念论”同毕达哥拉斯学派的“唯数论”得到了结合，他们用“数”来解释“理念”，甚至认为“理念”就是“数”，发展了一种数学化的哲学。

柏拉图唯心主义数学观，是关于数学绝对真理性的朴素信念在哲学中的歪曲反映。这种原始的唯心主义曾受到列宁的严厉批判。

3.亚里士多德的“数是抽象的存在”①

亚里士多德是古希腊的伟大思想家。他作为哲学家、逻辑学家已经广为人知。他在数学上虽说不上有什么突出的成就，但他对数学哲学进行了深刻的反思，并本着他的名言：“吾爱吾师，吾更爱真理”，对毕达哥拉斯学派的“数是万物的本原”和柏拉图的“数学实在论”观点进行了相当详尽的批判，在数学哲学方面作出了卓越的贡献。他对科学分类问题有很好的研究，指出数学同物理学和形而上学均属他所谓的“理论科学”。他对数学的研究对象问题进行了全面的论述，他认为：数学是研究数量的科学。这些对后世都有重要的影响。

亚里士多德对毕达哥拉斯学派关于数学对象独立存在于可感事物之中的观点也进行了批判。他指出，毕达哥拉斯学派的理论“是一种娇柔造作的教义”。的确，在该学派的理论中不乏牵强附会、生拉硬扯之处。比如，由于天上有“北斗七星”，所以古

① 以下内容参考了林夏水的论文：《亚里士多德的数学哲学》，载《自然辩证法研究通讯》1988年第4期。

希腊史诗中攻打底比人的英雄才是七个，音符也有七个，等等，因此他们断言“7”是个神奇的数目，并以此来解释上述现象。亚里士多德批评说，他们是“见小而忘大”，是错误的。亚里士多德还说，“数学对象存在于可感事物之中是不可能的。”他并从两个方面说明“不可能”的理由。第一，既然认为数与可感事物都是独立的实体，那么，说数独立存在于可感事物之中，就等于说两个实体占据了同一个空间，这是不可能的。第二，可感事物是可分的，而作为独立实体的数是不可分的，不可分的实体不可能存在于可分的实体之中，否则，当可感事物被分割时，存在于其中的数也将被分割。但这与独立实体的数之不可分相矛盾。亚里士多德通过这两个方面的反驳，否定了毕达哥拉斯学派的观点。

对柏拉图的“数学实在论”，即数学对象独立存在于可感事物之外的观点，亚里士多德分析得更仔细，他从七个方面进行反驳。这里仅转述其中三个方面的大意。

第一，如果在可感的体、面、线、点之外，还分别存在另一组与其相分离的作为数学对象的另一种体、面、线、点，而组合物总是由在先的、独立存在的要素组成的，即立体由先于它的面组成的，面由先于它的线组成的等等，于是就可以推出：存在两套体、三套面、四套线和五套点。那么，数学究竟研究哪一套呢？同样的道理也适用于数（即数学对象）。

第二，如果几何学的对象能脱离可感事物而独立存在，那么，天文学、光学和声学的对象也将脱离可感事物而独立存在，可是，比如说，如何想象天文学对象中的天空及其各部分脱离可见的天空及其各部分呢？如果这不可想象，为什么有的感觉能分离，而有的感觉又不能分离呢？

第三，柏拉图认为，数学处理的是理念和可感事物之间的“中介对象”，是中间体。据此观点，我们还可以从理念与中间

体之间再分离出另一类中间体，它既不是数也不是点，既不是空间也不是时间。如果这是不可能的，那么数学对象也不可能与可感事物相分离而独立存在。

亚里士多德通过七个方面的论证，得出结论说："数学对象并不是比物体更高级的本体，它们在本体性上并不先于可感事物，而只是定义上在先；它们不可能独立存在于某个地方。"① 这样，亚里士多德就否定了柏拉图关于数学对象独立存在于可感事物之外的观点。

亚里士多德在否定了毕达哥拉斯学派和柏拉图的观点后，提出了他的观点：数学对象是一种抽象的存在。对此，他主要从两个方面进行了论述。

首先，关于数学家研究问题的方法他说："研究每一个问题的最好方式是，像算术家和几何学家所做的那样，把不分离的事物加以分离。……几何学家研究人，既不作为人，也不是作为不可分之物，而是作为一个立体来研究的。"② 所以几何学家认为他们研究对象是存在的。这就是说，数学家研究问题的方法是把"不分离的事物加以分离"。这种方法就是一种抽象，所以数学家说他们研究的对象是存在的，这种存在是以一种特殊的方式存在着，即抽象的存在。

其次，关于数学研究对象，他说："有些物质是可感觉到的，有些物质是可理知的。可感觉到的物质，例如，铜、木材以及一切可变的物质。可理知的物质存在于可感觉的事物之中，但不是作为可感的事物，即数学的对象。"③ 可感事物中的这种不可感之物是什么呢？亚里士多德认为，它就是数学家在思想上从

① 转引自林夏水：《亚里士多德的数学哲学》，载《自然辩证法研究通讯》1988年第4期，第20页。

②③ 同上刊，第21页。

事物中分离出来的东西。他说："数学家虽然也讨论体、面、线、点，然而不是把它们作为……自然物显示出来的特性来讨论的。数学家是把它们从物体分离出来讨论的。因为在观念上它们是可以同物体的运动分开来的，而且这样做不会有什么影响，也不会造成结论上的错误。"他还说，"数学家研究抽象物，因为他在开始研究之前，首先剥离一切可感的质（例如，轻重、软硬、冷热以及其它可感的对立因素），只剩下量性和连续性（有时是一维的，有时是二维的，有时是三维的）以及作为量性和连续性的那些东西的属性，他不考虑其它方面，有时研究相对位置及属性，有时研究可通约性和不可通约性，有时研究比率。"由此可见，在亚里士多德看来，数学对象就是存在于可感事物中的不可感之物，它是从可感之物中分离出来的；这种分离是通过剥离物体的一切可感觉的质，而只留下量性和连续性。简要地说就是：数学是研究抽象物的，抽象物是人类思维的结果。

亚里士多德以前的哲学家，对一般与个别、抽象与具体的关系问题并不十分清楚，往往把一般、抽象分别当作个别、具体的事物一样是独立地、真实地存在着的。亚里士多德在分析数学对象的存在方式中第一次明确地认识到，一般存在于个别之中，抽象存在于具体之中，这是人类思想史上的一次重要的进步。亚里士多德同柏拉图观点的对立不仅在欧洲中世纪的唯名论和实在论的斗争中继续存在，而且在西方现代数学哲学的研究中也有直接的反映。

在无穷观问题上，亚里士多德与柏拉图的观点也是对立的。因为柏拉图的"理念世界"是一个整体，它容纳一切，包罗万象，是唯一、永恒的存在。人们对现实世界的任何知识（包括数学知识）都是理念世界的组成部分。既然靠思维才能把握的"理念世界"是合理的，所以那种不能通过经验的方法直接获得而要通过思维才能把握的实无穷概念也就是合理的。如果我们剔除其

唯心主义的外壳而保留它的合理内核，那么柏拉图作为实无穷论者是自然的。事实上，柏拉图的思想往往成为后来数学中实无穷论者的哲学根据。

在无穷的认识史上，亚里士多德第一个明确地指出，研究无穷同研究有穷一样具有重要意义。他说："既然研究自然是研究空间的量、运动和时间的，其中每一个必然不是无限的就是有限的，因此，……所有有名的哲学家，凡是接触过这门自然哲学的都讨论过有限无限的问题。"① 他第一次把无穷明确地区分为潜无穷与实无穷两种形式。他认为前者的特点是"此外永有"，而后者的特点则是"此外全无"。他对无穷作了这种区分之后明确指出，无穷只能是"潜能上的存在"，而不是实在的存在，清楚地表明了他对实无穷的排斥态度。他的理由是："说'无限'潜在地存在，意思并不是说，它会在什么时候现实地具有独立地存在；它的潜在的存在，只是对知识而言。因为，分割的过程永远不会告终，这件事实保证了这种活动潜在地存在，却并不保证'无限'独立地存在。"② 亚里士多德进一步认为，如果坚持潜无限而否定实无限，不会对数学造成任何困难，他说："这对数学家的证明工作是没有甚么影响的。"③

亚里士多德认识到研究无穷的重要性。他把无穷明确地区分为潜无穷和实无穷也很有意义。他的潜无穷观点对后来的数学哲学也有很大影响，例如，现代数学哲学中的直觉主义者继承了亚里士多德的潜无穷思想：只承认潜无穷，而不承认实无穷。

---

① 亚里士多德：《物理学》，商务印书馆1982年版，第75页。

② 《西方哲学原著选读》上卷，商务印书馆1985年版，第139—140页。

③ 亚里士多德：《物理学》，第90页。

1.6 初等代数的产生和发展

早期的代数学，出现在不同的国家和地区，虽然在时间上有先有后，但却是独立地产生和发展的，并在发展中出现一些相当于“代数学”的专门名称，如中国的“天元术”和“四元术”，印度的“元素计算的科学”和“未知数计算的科学”，日本的“点窜术”，阿拉伯和欧洲的“求根术”，意大利的“未知数的规则”或“大术”（以区别商业算术用的“小术”）等。

1.代数学的萌芽(巴比仑和埃及)

究竟什么是代数学？人们通常在同算术的比较中得出答案，认为代数是算术的发展，两者的区别是：在代数学中引入了未知数x、y等，再根据问题提供的条件先找出其中的数量关系即列出方程，然后根据一定的规则逐步解出未知数的值。可见，代数学的基本特征是解方程，即对未知数进行运算。算术虽然也有未知数，但只对已知数进行运算就可求出其值。如果把用代数方法所解决的问题都归入代数学的范围的话，则它的历史可以追溯到巴比仑的泥板和埃及的草纸书。

在巴比仑汉穆拉比（Hammurabi，公元前18世纪）时代的泥板中，不仅有一次方程问题，而且也有二次方程以及二元二次联立方程问题。例如，泥板中一个普遍的问题是，求一个板，使它同它的倒数之和等于一个已知数。用现在的符号就是解方程 $x+1/x=b$ 即 $x^2-bx+1=0$。他们解这一问题的步骤用现在符号表示就是求出

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1} \text{ 或 } \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$$

这符合今天的方法。由于他们还没有负数概念，所以巴比仑人只取正根。

在泥板中，也有二次联立方程问题。例如：设矩形的周长为2a，面积为b，求其边长。用现在符号表示就是解联立方程

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

再如：已知两个正方形面积之和为1000，其中一个边长是另一个边长的2/3少10，求两个正方形的边长。用现在的做法就是解联立方程

$$\begin{cases} x^2+y^2=1000 \\ y=\frac{2}{3}x-10 \end{cases}$$

由于利息的计算，在巴比仑的泥板中也出现简单的指数方程问题。例如，设年利率为20%，求几年以后本利和恰是本金的两倍，即解方程 $(1.2)^x=2$。

埃及人的几何成就是相当辉煌的，而他们的代数不如巴比仑。在阿梅斯的草纸书(公元前18世纪以前)中也有一次和二次方程的问题。例如该书的第11题是：一个数的2/3，加上这个数1/2，加上这个数1/7，再加上该数本身等于37，求该数。这是解一次方程：

$$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x+x=37。$$

阿梅斯的草纸书涉及二次方程的问题比较简单，均可化成 $x^2=b$的形式。即使涉及两个未知数，方程类型大多是如下形式：

$$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ y=bx \end{cases}$$

消去一个未知数后仍是$ax^2=b$的形式。

值得注意的是在阿梅斯的草纸书中已出现符号的萌芽：用一个人走近和走开的腿形⩘和⩗分别表示加法和减法，并用ㄱ表示

平方根。

由于巴比仑人和埃及人对代数问题的解法都是用语言文字叙述的，所以即使是很简单的问题，解题的过程也很烦琐，因此，数学史一般称其为文字代数。

2.代数学的酝酿（中国和印度）

代数与算术的区别，除了一个是对未知数进行运算、另一个是对已知数进行运算外，主要的区别还在于在代数中数的概念已由算术中的正有理数扩大到负数和无理数，否则代数学的建立是不可能的。中国数学对数的概念的发展作出了重要贡献。

中国是采用十进位制的国家，最早提出了分数概念、表示法和一整套的运算法则（例如，刘徽的“异同术”），为代数学的产生铺平了道路。

负数概念在西方得到承认是近代数学时期的事，但是在中国不仅早已有了负数概念，而且还形成了一套完整的正负数的运算规则。在《九章算术·方程章》的“术文”中给出正负数的定义是：“今两算得失相反，要令正负以名之”，即两个“得、失”相反的数分别称为正数和负数，“正”与“负”这一对术语至今沿用。“术文”还用寥寥36个字，给出了正负数加减运算的规则。我们把这36个字同现在的符号对照如下：

同名相除　$(+a)-(+b)=+(a-b)$

异名相益　$(+a)-(-b)=+(a+b)$

正无入负之　$0-(+b)=-b$

负无入正之　$0-(-b)=+b$

异名相除　$(+a)+(-b)=+(a-b)$

同名相益　$(+a)+(+b)=+(a+b)$

正无入正之　$(+a)+0=+a$

负无入负之　$(-a)+0=-a$

这里的“同名”和“异名”即今天的同号和异号，“除”和“益”

就是今天的减和加。

我国元初朱世杰（13世纪）在他的《算学启蒙》一书中对《九章算术》的正负数加减规则已用现代语言表述，比如将“益”和“除”分别改成加和减，并进一步提出正负数的乘除规则：“同名相乘为正，异名相乘为负”，“同名相除所得为正，异名相除所得为负。”

《九章算术》中所谓的“开带从平方”，就是解形如$x^2+px=q$（p、q均为正数）的二次方程。祖冲之（429—500）在《缀术》中所说的“开差立”，数学史家一般认为就是解三次方程，但因该书已经失传，现已无法查实。唐初王孝通（6～7世纪）在他的《缉古算经》一书中通过代数方程解几何问题，其中主要成就之一就是解三次方程$x^3+ax^2+bx=c$（a、b、c均为正数）。例如，该书第二题相当于解三次方程$x^3+1620x^2+850500x=146802375$。中亚学者奥玛尔·海亚姆也研究过三次方程的解法，但晚于王孝通约五百年。日本数学史家三上义夫（1868—1950）曾评价说，“唐王孝通之《缉古算经》，使用三次方程式以解各种问题”，“三次方程式，在阿拉伯算学上，乃甚显著之事，然中国成立三次方程式，乃在阿拉伯之前；而由术文推得方程式解法，亦与发达于阿拉伯者全不同也。”①

《九章算术》还最早提出了多元线性方程组的概念，并以分离系数的形式给出方程组的表达式。该书解线性方程组的方法——“直除法”同现在的“加减消元法”相一致。不仅如此，该书还明确提出了方程组中各方程的系数既不能互成比例，也不能互相矛盾。这一规定是相当深刻的。

印度自1922年谟亨约·达罗（Mohenjo—daro）遗址发现后，印度文明可追溯到公元前3000年。但是印度数学发展的高峰

---

① 转引自李迪：《中国数学史简编》，辽宁人民出版社1984年版，第131页。

则是 5 ～12世纪。这时的欧洲还在黑暗时期，所以这时期的印度是世界数学发达地区之一。

印度人相当早地引入了负数。他们用正数表示收益，而用负数表示欠债。波罗摩笈多在628年左右正确地给出了正负数的四则运算规则：“正数相减，大的减小的，结果为正；负数相减，（绝对值）大的减小的，结果为负”；“反过来，小的减大的，负变正，正变负”；“正数减负数或者是负数减正数，它们必须相加”；“正负数相乘得负，二负数或者二正数相乘得正，但正数除以负数或是负数除以正数结果都是负的”。婆什迦罗进一步指出：“正数、负数的平方为正数，正数的平方根有两个，一正一负”；“负数没有平方根，因为负数不是平方数。”①

印度人对数的概念的另一个成就是正视无理数。虽然他们忽视了无理数同有理数的某些差别，把有理数的运算步骤运用于无理数，但却由此获得一些有用的结论。例如，我们把婆什迦罗对两个无理数相加的方法用现在的符号表示就是：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+1\right)^{2}\cdot a}$$

对开平方以及无理数相乘、相除，他都一一给出了计算规则。

对一般的一元二次方程$ax^2+bx+c=0$，婆什迦罗讨论得很仔细，且承认有两个根，他的方法用现在符号表示就是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

可惜，婆什迦罗对负数的运用还是有所顾忌的，每当出现负根时，他总是舍去。

印度人对线性方程组、三次和四次方程以及不定方程都有相

① 中外数学简史编写组：《外国数学简史》，山东教育出版社1987年版，第183页。

当多的研究，因对代数学发展的影响并不显著，所以不加叙述。

在希腊时期，科学知识主要掌握在奴隶主民主派手中，他们一般是长于思辨，重视逻辑推理、卑视实际应用，因此，在数学发展的历史上他们对几何学作出了突出的贡献。在中国和印度，特别是在中国，数学知识主要掌握在中、下层知识分子手中，他们重视数学在实际中的应用，特别是数学在天文历法方面的应用，因此，在数学发展的历史上，中国和印度的数学对代数学的发展作出了重要的贡献。尽管中国和印度的几何学也有相当高的成就，但是，几何问题主要都是化归为代数问题解决的。因此，如果说希腊的几何学是数学的同义语的话，那么，似乎也可以说，中国和印度的代数学也是数学的同义语。正如在希腊没有把几何学看成数学的一个分支一样，在中国和印度也没有把代数看成数学的一个分支。代数从数学中开始分化起于罗马时期，定型于阿拉伯时期，而完成于16世纪，中间经过一千余年的演变。

3.代数学从数学中分化（罗马和阿拉伯）

欧洲在罗马帝国时期，数学思想有了很大的转变。因罗马人崇尚武力，比较重视实用，所以他们对《几何原本》和《圆锥曲线论》这些纯粹逻辑推理的数学著作不感兴趣，而较多地关心计算技术。因此，希腊时期没有受到应有重视的算术和代数在这时期有了一定的发展，曾被希腊人几何化了的代数开始从几何中分化，为以后代数学的发展奠定了基础。这一分化，主要体现在希洛、尼可马修斯和丢番图的工作中。

希洛是一个测绘技术人员，也是一个发明家，一生著述共十来种。在希腊时代，长度、面积和体积是不同的概念，因而不能相加减，但是希洛首次冲破了这一界限。在他的著作中重视数值结果。比如，他曾讨论过这样一个问题：已知正方形的面积和边长之和为896，求其边长。用现在的符号就是解方程 $x^2+4x=896$。希洛背离希腊数学的传统，把面积和长度相加，这是代数

开始从几何中分化的先声。

尼可马修斯也一反希腊数学的传统，使算术（近似今天初等数论）从几何学中分化而成独立的数学分支。反映这一思想的是他的代表著作《算术入门》。该书虽然写得并不成功，但因反映了当时人们的兴趣因而风行一时，在这一时期内它取代了《几何原本》，也是以后大约一千年的时期内欧洲人学习算术的主要教科书。

代表罗马帝国时期数学特点和代数发展高峰的是丢番图，有人称他为代数学的鼻祖。他的主要著作是《算术》。据他自己说，该书共13卷，且是为了帮助学生学习而编的，但是现在仅存6卷，得自13世纪的一个手抄本。现存内容大部分属于今天的代数学范畴。《算术》是用问题集的形式写的，共189个问题，包括了50多种类型，但没有分类。

丢番图对数学的贡献主要有两个。一个是关于代数不定方程的整数解的研究，由此而奠定了今天数学中的“丢番图分析”。在数学中采用成套的符号是丢番图另一个重要贡献。丢番图的“题中的数”用s表示，即今天的未知数x；其它如：用$\triangle^{y}$表示我们的x^2，用k^{y}表示我们的x^3，用s^{x}表示我们的$\frac{1}{x}$，用↑表示减号以及用L^{α}表示相等，等等。

丢番图的解题技术很卓越，但没有形成一般性方法，19世纪的数学家汉克尔曾评论说，“近代数学家研究了丢番图的100个问题后，去解101个问题仍然感到困难。”他也没有负数概念（更无实数概念），只承认正根，没有正根的方程他认为无解，当二次方程有两个正根时，他只取最大的一个。在符号方面，丢番图的符号实际是语言文字的缩写符号，跟今天代数学中的符号不同。但缩写的符号代数毕竟比文字代数是一个进步。因此，人们认为丢番图的代数是从早期的文字代数发展到以后的符号代数的

中间环节。

从7世纪开始，阿拉伯帝国逐渐崛起，到8世纪，它已成为一个地跨亚、非、欧三洲，幅员超过罗马世界的庞大帝国。在公元800年前后的100余年内，阿拉伯帝国在其统辖的比较大的城市建立图书馆和天文馆，政府组织人力进行天文观测，编制星表，集中学者翻译和注释希腊罗马的科学名著。有继承才有发展。阿拉伯学者在保留和继承希腊罗马科学成就的同时也作出自己的贡献，在数学方面的主要贡献是把代数学确立为一门独立的学科。

乌兹别克的学者阿尔·花拉子模是这时期著名科学家之一，他关于天文、三角、算术和代数方面的著作曾先后传入欧洲，有的著作直到16世纪仍为欧洲一些大学的教材。“代数学”这一名称就是由他的有关著作的书名演变而来的。

花拉子模的代数著作的手稿书名是《AL-jabr W′ almuqâbaia》。但花拉子模没有对他的书名作任何解释，后人作了种种推测。1600年左右，艾丁提出了一个今天沿用的解释：al-jabr 意为“还原”，即把方程中的负项移到另一端变为正项；muqâbala 是“化简”或“对消”，即把方程两边相同的项消去或合并同类项。花拉子模这一著作在12世纪被译成拉丁文，书名是《Ludus algebra et almucgrabalaeque》（也用过其它名称）。14世纪时又简化成algebra。

用algebra作为学科的名称虽出现于14世纪，但是，直到18世纪仍有人反对。韦达认为algebra在欧洲语中没有意义，所以他把他有关著作称为《分析术引论》（1591）。在中国，最初用algebra的音译名：“阿尔朱巴尔”、“阿喀勒布拉”和“阿尔热巴拉”等，康熙等叫“东来法”（意为此法是从中国传去的）。1859年，李善兰在同伟烈亚力翻译棣么甘编写的《Elements of Algebra》时，李善兰认为，该学科的特点是“以字代数：或不定数（指变数），或未知的已定数。……恒用之已知数或因

太繁，亦以字代”，所以把该学科首次定名为“代数学”，现在沿用，不仅我国用，日本也用此名。在华蘅芳等翻译华里司的《代数学》（1873）之卷首也说："代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之。”可见，这时的代数被理解为用符号代表数字运算的方法。

在花拉子模的代数著作中，首先对一次和二次方程进行了分类，再用通俗易懂而又典型的实例，指明解题的过程和方法，条理清楚，使读者容易掌握解法，达到“举一反三”的作用。比如，解二次方程$x^2+bx+c=0$，他的文字叙述相当于给出公式

$$x=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

花拉子模写该书的指导思想是非常明确的。他在该书的序言中说："在这本小小的著作里，我所选的材料是数学中最容易和最有用途的，是人们在处理下列各项事务中经常需要的：在有关遗嘱和继承遗产的事务中，在分析财产、审理案件时，在人们的一切商业交易中，在丈量土地、修筑运河的场合中，在几何计算和其它科学中……。”① 这本书用了3/4的篇幅解决各种应用问题，主要是财产的继承问题。穆斯林的财产继承权有着严格而复杂的规定。因此，财产的分配对法学家是相当紊乱而又困难的问题。花拉子模善于把这些实际问题化为一次或二次方程的求解问题。他还把未知量称为dirhem（阿拉伯重量单位或钱币）、“东西”或“（植物的）根”，特别是后者有“根本”、“根源”之意，在15～16世纪被欧洲各国普遍采用。因此，代数在当时又有“求根术”之称。

---

① 中外数学简史编写组：《外国数学简史》，山东教育出版社1987年版，第234页。

虽然花拉子模在代数符号化和题目的难度两个方面比之丢番图是一个倒退，但因他把代数学作为一门独立的学科的思想比较明确，又比较系统地给出一次和二次方程的解法，而方法又易于掌握，他提出的“还原”与“对消”两种变换又体现了解方程的两种基本变形——移项与合并同类项，因此，有人称他是“代数学之父”也是很自然的。

解二次方程必然会遇到负数和无理数。花拉子模对负根同丢番图一样经常舍去，而对无理根他称之为“聋根”或“哑根”，也经常弃去不用。

塔什干诗人奥玛尔·海亚姆也是一位杰出的天文学家和数学家，他著有代数学的专著《代数学》（约1079年）。海亚姆对代数学的贡献有三点。第一，承认无理数也是数。他明确地说，不管是可公度的或不可公度的量之比都可称之为数，并采纳了印度人对无理数运算的式子，比如$\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$以及$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$等。第二，他不仅把代数学看成独立的学科，而且还把代数定义为“解方程的学科”。他曾说：“代数是一门有技巧的学科，它的研究对象是纯粹的数（指正有理数）和可度量的量（指几何中的线、面、体）。虽然这些量是未知的，但可以通过已知的东西来确定它们。精通这门学科在于掌握确定算术的和几何的量的方法。”① 第三，比较系统地研究了三次方程，比如，作出三次方程的分类，以及每类方程用圆锥曲线求解的方法。可惜海亚姆解方程仍限于正根。

4.初等代数的确立（欧洲文艺复兴时期）

文艺复兴时期，是欧洲自然科学冲破神学长期的束缚而急剧发展的时期，也是西方科学继古希腊之后的第二个发展高峰。在数学方面，这时期，“印度——阿拉伯数字”已定型通用，十进

① D.S.卡西尔：《奥玛尔·海亚姆的代数学》，纽约1931年版，第47页。

小数与对数概念已经应用，作为初等数学的三角学已被确立为一门独立的学科，特别是代数方程论的发展与符号代数的产生。所有这些成就标志着初等数学已基本完成。

一元二次方程的一般解法，经过罗马时期的丢番图、印度的婆什迦罗以及阿拉伯的阿尔·花拉子模等人的工作已经形成（当然，他们是用文字叙述的），于是寻求一般三次方程的公式解法已提上日程。虽然丢番图、花拉子模以及海亚姆等都研究过三次方程的解法，也有某些进展，但是，到15世纪末，并不像二次方程那样得到一个一般解法。直到1494年，意大利人帕奇奥里还认为这个问题像"化圆为方"问题一样是不可解的。

大约在1500年，意大利波伦那（Bologna）大学的数学教授菲尔洛把三次方程分为三类：$x^3+px=q$，$x^3+q=px$，$x^3=px+q$（p、$q>0$），并宣称已经得出一般解法。由于16、17世纪时，人们常将自己的发现保密而作为向对手挑战的资本，所以人们无法知道菲尔洛的方法。然而在1510年，他把自己的方法秘传给两个人：一个是他的得意门生菲奥尔，一个是他的女婿那发。稍后，意大利另一位自学成才的数学家塔尔塔利亚（意为口吃者），他的原名是方坦那（Fontana），也宣布已经掌握了三次方程的一般解法，但仍然保密。菲奥尔得知这一消息后很不服气，并说自己早已知道。可能双方都认为对方在吹牛。于是双方相约于1535年2月22日在米兰教堂进行比赛（这可能是最早的数学竞赛）。届时，双方按协议的范围为对方出30个题，看谁做得对、完成得快。比赛结果，塔尔塔利亚只用了两小时的时间解出了对方所提出的30个题，而对方则一个题也没有做出。塔尔塔利亚的胜利，震动了意大利的数学界，人们纷纷要求把他的方法公开，结果都被他拒绝了。但是在当时的怪杰卡尔丹再三恳求下，塔尔塔利亚将他的方法告诉了卡尔丹，条件是保密。但是后来卡尔丹失信了——他将这一方法写入一部著作《大法》（1545年出

版）中。所以今天一般的教科书把这一方法叫“卡尔丹公式”。卡尔丹在《大法》中说：“波伦那的菲尔洛差不多在30年前就发现了这个方法，并把它传给威尼斯的菲奥尔，菲奥尔在与布里亚的塔尔塔利亚竞赛的时候使塔尔塔里有机会发现这一方法。塔尔塔里亚在我的恳求下把这个方法告诉了我，但保留了证明。我在获得这种帮助的情况下找出了各种形式的证明。这是很难做的。我把它叙述如下。”①看来，卡尔丹的这一叙述并不完全客观：第一，如果菲尔洛发现这一方法，那么，得到他的秘传的得意门生菲奥尔在竞赛中决不会失败得如此之惨；第二，塔尔塔里亚既是“保留了证明”，说明他已给出证明。当然，卡尔丹的证明也是他独立作出的。

三次方程有了一般解法以后，寻求四次方程一般解的问题更为突出。这个问题很快于1540年被菲拉利解决。菲拉利原是卡尔丹的仆人，因其聪敏而作卡尔丹的秘书、学生，成为卡尔丹的朋友。菲拉利的方法也被卡尔丹记述在他的《大法》一书中。

高于四次方程一般解法的研究是近代数学时期以后的事。下面我们集中叙述符号代数的产生。

符号在数学中的重要性是显然的，它是数学区别于其它科学重要特征之一，在一定意义上说，没有优越的符号，就不可能有近代和现代数学。16、17世纪，也是现在数学中常用符号的产生时期。

运算符号：+与-最早用于运输箱子重量的超亏，1481年首次出现于德国数学家魏德曼的一份手稿中。×号是英国奥德雷特于1631年首创，实际是把十号斜过来，意为表示另一种加法。但是遭到莱布尼茨的反对，理由是易于同x相混，并提出用圆点·表示乘号。当时的欧洲流行十来种表示乘法的符号。根号$\sqrt[n]{\ }$的

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第1册，第307页。

发展历史较长：1525年，鲁道夫用$\sqrt{}$表示根号；1629年，荷兰的基拉尔德用$\sqrt[n]{}$表示开n次方；1636年，笛卡尔将$\sqrt[n]{}$与括线——结合形成符号$\sqrt[n]{}$，沿用止今。

关系符号：等号＝是英国的雷考特于1557年提出的，理由是最相像的两件东西莫过两条等长的平行线；（此外，韦达曾用～表示相等，笛卡尔曾用x表示相等）＞和＜是哈略特于1631年首次使用的；垂直符号⊥是艾里贡于1634年首次用的；平行符号∥是奥德雷特于1677年首次使用的。

辅助符号：圆括号是塔尔塔里亚1556年使用的，方括号是邦别里于1550年使用的，花括号则是韦达于1593年使用的。

上述数学符号的先后提出并通用，为数学的发展创造了条件。

在代数学发展的历史上，除了未知量的名称外，它的符号是人们普遍关心和重视的。前已提及，丢番图曾用s、$\triangle^{y}$、k^{y}等分别表示今之x、x^2、x^3等。意大利的帕奇奥里曾用Cosa、Censo、Cuba的头两个字母——Co、Ce、Cu分别表示今之x、x^2、x^3，还用Radix的头一个字R表示平方根$\sqrt{}$。15、16世纪，数学符号比较混乱，同一个方程式不同的数学家用不同的符号表示。

代数学发展的重要一步是法国的韦达作出的。韦达是一个人文主义者，受过法律教育，当过律师，曾任亨利亲王的顾问，44岁时因政治上的失意转而研究数学。他的《分析术引论》(1591)是符号代数的早期著作。韦达对代数学的贡献最主要的有两个：一个是，不仅用元音字母表示未知数，而且用辅音字母表示已知数——方程的系数和常数项。后者意义很大，说明人们对数量关系认识的提高。今天用x、y、z等表示未知数，用a、b、c等表示已知数以及用a^3表示aaa等起源于笛卡尔。从此逐渐统一了方程表示的混乱状态。韦达的第二个重要贡献是第一次对代数和算术

作了明确的区分：代数是关于类或形式的计算技术，算术则是关于具体数字的计算技术。以韦达的工作为标志，代数被看成研究一般类型的形式和方程的学问。

5.代数方程论的确立和发展（17～19世纪）

代数方程论主要是研究代数方程根的求法、存在、性质和分布的数学，是古典意义下的代数学发展的一个新的阶段。它的发展，不仅涉及到负数和无理数，而且必然涉及虚数。16、17世纪，正当数学家们对负数和无理数感到困惑之时，虚数的出现使他们又一次地陷入更大的困惑之中。

最早接触到虚数的是15世纪法国的丘凯。他在其《算术三篇》（1488）中由解方程 $x^2+4=3x$ 而得到虚数：$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}$。因认为负数不能开方而否定该方程有解。卡尔丹在他的《重要的艺术》(1545)一书中，曾讨论把10分解成两个数之和，使其乘积等于40，即解二次方程 $x(10-x)=40$，结果发现此二数是：$5+\sqrt{-15}$ 和 $5-\sqrt{-15}$。他在用所谓的“卡尔丹公式”解三次方程 $x^3=15x+4$ 时，碰到同样的问题。因为该方程有三个实根 4，$-2+\sqrt{3}$，$-2-\sqrt{3}$，而用卡尔丹公式则得到虚根：$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$。丘凯和卡尔丹在解某些二次方程时已经遇到虚数。其实，解最简单的二次方程 $x^2+1=0$ 就得到虚数，但这并没有引起重视。因为只要简单地说这个方程无解就行了。但是三次方程则不然。1572年，拜别里发现，方程 $x^3-7x-6=0$ 有三个实根 3、-2、-1，但用卡尔丹公式则得出虚数形式。因此，数学家面临的问题是：如果肯定卡尔丹公式的有效性，就必须肯定虚数的实在性；反之，如果否定虚的存在，这无异于否定卡尔丹公式。

在虚数问题上，18世纪多数人持否定的态度。比如：塔尔塔

利亚把虚数同无理数一样看成是不可约的情形；卡尔丹称其为“诡辩的量”，他认为算出这样的量是要受到良心的责备的；对数的创造者纳皮尔称其为“实数的鬼魂”；笛卡尔称之为“虚数”，此名沿用至今；莱布尼茨认为这种数是“介于存在与不存在之间的两栖物”。少数人如基拉德等虽然认为虚数有用，但因论证不充分而影响不大。1777年，著名数学家欧拉用符号i（拉丁文虚幻imaginarius的第一个字母）表示$\sqrt{-1}$。他一方面否认它的实在性，称其为“不可能的数”或“幻想中的数”，另一方面又承认它在实际计算中有重要作用。

18世纪，复数同负数有类似的情况：一方面，人们对复数的运用存有戒心，不是心安理得的；另一方面，无论在什么地方，只要用到复数演算，结论总是正确的。这一事实不能不对数学家关于复数的态度产生强烈的影响。达兰贝尔在《百科全书》的“负数”条目中说：“对负数进行代数运算的代数法则，任何一个人都是赞成的，并认为是正确的，不管我们对这些量有什么看法。”若把这段话中的负数换成复数也完全适用。因此，上述欧拉关于复数的观点在18世纪是有代表性的。

1797年，挪威的测量员威赛尔在一篇论文中提出复数a＋bi的几何解释，但未被重视。1806年，瑞士的图书管理员阿干德在他的一本小册子中，提出类似威赛尔的几何解释，并提出用“模”来表示a＋bi的长度，仍未引起注意。1799年，高斯关于代数基本定理的证明，使复数在数学中的地位得以巩固创造了重要条件，因为这一定理的证明必须依赖于对复数的承认。事实上，高斯于1799年已有复数几何解释的思想，但是长期没有发表。1837年由哈密顿才把它公诸于世。高斯提出，用数对（a，b）表示他所命名的复数a＋bi，再用笛卡尔坐标系的x轴表示实轴，而用y轴表示虚轴，于是任何复数都可用平面上的点表示。高斯称这样的平面为复平面。复数的几何表示虽然十分简单，但是正如高

斯所说："这样的几何表示使人们对虚数真正有了一个新的看法。"从此复数得到数学家、物理学家的理解，并由此而发展出一个崭新的数学领域：复变函数论。

在代数方程论的初期，人们主要关心的是方程根的求法，不太关心方程根的存在性。但是方程论发展到18世纪，根的存在定理——代数基本定理受到普遍重视。它的证明，是代数方程论严密化的标志，是代数学发展史上的一个里程碑。

如果我们把复数看成实数与虚数之总称，那么，所谓代数学基本定理就可以表示成："每一个复系数的方程至少有一个复根"，由此即可推出"n次复系数的方程恰有n个复根"。

卡尔丹在解三次方程时，已意识到它有三个根，但他没有重根概念，因此，遇到重根时，就无法解释了。罗特在1608年、基拉德在1629年以及笛卡尔在1637年，都曾有n次方程有n个根的猜想，但表述得不够明确。直截了当地提出"n次方程总有n个根"的是德国的开斯特耐尔。

如果说17世纪只是通过归纳、猜想的途径得出代数基本定理的话，那么，18世纪则通过证明的途径来确立代数基本定理。欧拉曾断言："任何实系数多项式都能分解成实系数的一次和二次的乘积"。但他只证到六次多项式成立，还不是对其断言作一般性证明。达朗贝尔、拉格朗日等都曾对欧拉的断言作比较一般地证明。

第一个对该定理以严格的形式证明的是年青的高斯。1799年，22岁的高斯在他的博士论文中不仅完整地证明这一定理，而且还证明了任一个n次多项式必能分解成一次和二次实系数因式的乘积。1799年后，高斯又给出三种不同的证明。此外，柯西、雅可比、阿干德、外尔斯特拉斯以及克隆尼克等，都对这一定理作过证明。它的证法很多，以至无法说出到底有多少种。

17世纪的代数方程论，除了代数基本定理以外，另一个重要课题是，不解出方程而按它的系数去反映它的根的一些性质。这

些问题是：（1）确定方程实根的存在性与个数；（2）进一步指出正根与负根的个数；（3）指出实根所在范围或指出在给定范围内实根的个数。

1637年，笛卡尔清晰地指出了代数方程的根的分布情况，这就是著名的“笛卡尔符号法则”。这个法则指出，实系数方程 $f(x)=0$ 的正根数不多于系数的变号数，而负根数不多于两个正号与两个负号连续出现的次数。

“笛卡尔的符号法则”之所以没有确切地指正根和负根的个数，是因为方程中有复根存在。1707年，牛顿给出了判别正、负根个数的方法，是一个进步，但牛顿的方法用起来没有笛卡尔法则简捷。

不管是笛卡尔还是牛顿，都没有给出他们的方法的证明。高斯不仅提出了更完整的方法，而且还给出了证明。高斯指出：对于实系数方程，如果它的根都是实的，则其正根的个数（含重根）等于它的系数序列的变号次数；如果它有复根，则其正根等于这个变号数或比这个变号数小某一个偶数。

笛卡尔、牛顿和高斯只是回答了上述问题的第二个问题，其中第一个，特别是第三个问题并没有解决。从笛卡尔起，包括牛顿、西尔维斯特、傅利叶等在内的数学家，都致力于这些问题的研究，但是没有得出满意的结果。1835年，法国的斯图姆通过以他的名字命名的定理满意地解决了上述三个问题。

斯图姆定理：设区间〔a、b〕的两个端点都不是实系数方程 $f(x)=0$ 的根，$f(x)=0$ 也没有重根，将a、b分别代入斯图姆函数序列，可得到两个实数列：

$$f(a),\ f'(a),\ f_1(a),\ f_2(a),\ \cdots\cdots,\ f_{m-1}(a),\ f_m(a) \quad (A)$$

$$f(b),\ f'(b),\ f_1(b),\ f_2(b),\ \cdots\cdots,\ f_{m-1}(b),\ f_m(b) \quad (B)$$

设序列（A）、（B）的变号数分别为S_a与S_b，则S_a-S_b就是方程$f(x)=0$在区间〔a，b〕内的实根个数。

当区间〔a，b〕变为（$-\infty$，$+\infty$）时，斯图姆定理仍成立。如果$f(x)=0$有重根，则此重根必为$f'(x)=0$的根。所以求出$f(x)$与$f'(x)$的最高公因式$D(x)$，再用$D(x)$除$f(x)$而得$g(x)$，则$g(x)$不含重根。对$g(x)$再用斯图姆定理。

今天所谓的“韦达定理”是反映方程的根和其系数关系的又一个重要定理。其实，这个定理并不是韦达一个人的贡献。17世纪，至少有三个人大致同时都比较全面地提出了根与系数的关系。

1615年，韦达在他的《方程的认识和修正》一书中指出：方程

$$x^3-(u+v+w)x^2+(uv+vw+uw)x-uvw=0$$

有三个根u、v、w。由于u、v、w可以是任意数，因此，韦达认为上述关系普遍成立。由于韦达只承认正根，所以韦达的结论缺乏完整性。相对而言，基拉德的结论比较完整。

1629年，基拉德在他的《代数的发现》一书中，提出n次方程有n个根的断言。基拉德的结论用现在符号表示就是：如果n次方程

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

的n个根是，x_1，x_2，…，x_n，则

$$\sum x_i=-p_1,\ \sum x_ix_j=p_2(i\neq j),\ \cdots\cdots,$$
$$\Pi x_i=(-1)^n p_n$$

虽然基拉德承认负根，但他还不了解虚数成对出现以及高次方程能分解成一次和二次不可约方程的乘积，所以基拉德不可能对他的结论进行证明。

英国的哈略特在其遗著《解析举例》（1631）中也有关于根

与系数关系的叙述。

韦达定理的证明，是在高斯证明了代数基本定理后作出的。对复根的计算是按照有理数所适合的规则进行的。

求方程根的近似值也是方程论的内容之一。英国的霍纳在其论文《用连续逼近法解所有阶的数学方程的新方法》(1819)中提出了所谓的“霍纳法”。实际上，类似的方法已在1804年为鲁菲尼所得。霍纳和鲁菲尼的方法，我国秦九韶已于1247年得出。他们二人的这一工作虽然晚于秦九韶，但也是独立地得出的。

1.7 中国古典数学*思想和数学哲学

1.中国数学的酝酿（先秦时期）

中国是世界文明古国之一，数学是其文明的组成部分。从远古到先秦时期，中国数学的特色已露端倪。

已经出土的古代文物如石器、骨器、陶器等表明，我国很早已有简单的几何知识。古书还记载有在远古年代用规、矩作图的传说。我国是世界上使用十进制最早的国家之一，商代（公元前16～11世纪）甲骨文中的数字都是十进制的，殷商时期的六十甲子表明，那时已有最小公倍数和最大公约数概念。至迟在春秋时代，“九九”乘法已经普及。我国古时的计算工具是“筹”，《老子》说，“善计者不用筹策”，可见这时用筹计算也相当普及。用筹计算对我国数学的发展影响很大，几乎可以说，我国数学是在用筹计算的基础上发展起来的。据《周礼》和《六韬》等

* 这里所说的“中国古典数学”是指1840年以前具有特色的中国数学，以同1840年以后的中国近现代数学相区别，下边在不混淆的情况下仍用“中国数学”一词。

古书记载，当时的政府部门已设立专门负责全国统计计算的“司会”和“法算”等官员。春秋时期，还出现世袭的掌管天文历法的“畴人”。

中国这时期的数学，主要是编制历法、制定音乐理论以及各种实际问题的计算，这与同一时期的希腊数学重视理论概括、忽视实际应用的风格不同。

先秦时期，伴随奴隶制的逐渐瓦解和封建制的形成，反映社会各阶级利益的思想家蜂起。诸子百家普遍重视诸如“修、齐、治、平”之道，而忽视数学(对其它科学技术亦然)，这与同时期的希腊思想家们普遍重视数学不同。因此，当时的数学知识主要掌握在社会地位低下的平民手中，自然是零散的感性知识。

尽管如此，在一些典籍中，特别是在墨家、名家和道家的典籍中，仍有不少关于数学思想的记述。

《老子》说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”该书对这一段话没有解释，后来的道家及其它学派也没有作进一步解释，但是万物产生于“一”这个思想是明确的，这同毕达哥拉斯学派“万物的始基是一元”的思想一致，并对后世的数学思想也有一定的影响。

《墨经》中抽象的数学知识不少，有关于方、圆、平、直、点、线、面等的定义。比如，“圆，一中同长也”，“平，同高也”等。《墨经》还说：“端，体之无厚而最前者也”；“端，无间也”；“非半弗𣃁则不动，说在端”。也就是说，“端”是“无厚”、“无间”且“非半弗𣃁”(𣃁，有分割之意)，即：对“体”来说，“端”就是“面”，而对“线”而言，“端”又是“点”。

《庄子》中的“一尺之棰，日取其半，万世不竭”是典型的潜无穷思想。《庄子》还说：“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一”。这里的“大一”和“小一”分别相当今天的无

穷大和无穷小。《庄子》中也有“飞鸟之景（影）未尝动也”，“镞矢之疾而有不行不止之时”的话，这同芝诺悖论相似，但由于论述较少，所以对我国后世数学影响不大。

2.中国数学的形成和发展（汉唐时期）

从汉初到唐末的一千余年的时期里，是我国传统数学的定型和初步发展时期。这期间的代表著作是《算经十书》，代表人物是刘徽、祖冲之与王孝通等。

在《算经十书》中，产生较早、且对后世数学影响最大的是《九章算术》（以下简称《九章》）。该书是我国从先秦到西汉年间数学成就的总结，经数次修改、补充而成今天所看到的形式。它把246个典型的数学问题分成九类：方田（计算面积）、粟米（比例交换）、衰分（比例分配）、少广（开平方、开立方）、商功（计算体积）、均输（分摊徭役赋税）、盈不足（双设法和盈亏问题）、方程（一次联立方程）和勾股（用勾股定理解各种实际问题），共有九章。它的叙述方式，主要是在若干同类问题之后，给出解决这类问题的方法，有时先提出一种算法，然后再举若干实例。《九章》在算术、几何、代数方面内容丰富，有重要的成就。它虽然没有《几何原本》那样的逻辑体系，但不等于没有用到逻辑。它不仅用到归纳逻辑和演绎逻辑，而且也用到三段论。

汉武帝独尊儒术，之后，在我国长达两千余年的封建社会里，儒家思想一直居于统治地位。所以，我国古代数学的发展不能不受儒家思想的某些影响。儒家的天道不变、崇尚往古的思想反映在学术领域是比较保守的，这对我国的数学和科学技术的发展是一条无形的枷锁。不仅如此，后世儒家还直接贬低数学。比如，北齐文学家颜之推在《颜氏家训》中说：“算术者亦六艺之要事，自古儒士论天道、定律历皆通之，然可兼明，不可以专业。”我国古代专业数学家寥寥，且社会地位低下，这同儒家思

想不无关系。

《老子》中“道生一”的神秘主义思想在我国传统数学中也有影响。《算经十书》之一的《孙子算经》的《序言》中如下一段话最为典型：

“夫算者，天地之经纬，群生之元首，五常之本末，阴阳之父母，星辰之建号，三光之表里，五行之准平，四时之终始，万物之祖宗，六艺之纲纪。稽群伦之聚散，考二气之升降，推寒暑之迭运，步远近之殊同。观天道精微之兆基，察地理纵横之长短。采神祇之所在，极成败之符验。穷道德之理。究性命之情。立规矩，准方圆，谨法度，约尺丈，立权衡，平轻重，剖毫厘，析黍絫，历亿载而不朽，施八极而无疆。散之不可胜究，敛之不盈掌握。响之者富有余，背之者贫且窭。心开者幼冲而即悟，意闭者皓首而难精。”

《孙子算经》把数学看成从天道到地理，从人事到神，祇以及从道德到生命等等无所不能，当然不妥，但是该书的中卷和下卷共有64个问题，除了最后一题推算生男生女属荒诞无稽之外，其余问题均来自实际。事实上，上述《序》中的数学思想对我国传统数学的发展影响不大。

从汉初到唐末的一千余年的时间里，神州大地也曾抚育一些优秀的数学家，三国时刘徽就是其中之一。

刘徽名不见经传，显然一生布衣，连生卒时间也无法确定，今天只知道他在263年注《九章算术》。他还自撰《重差》（后人称《海岛算经》）一卷，《九章重差图》一卷，后者于唐代失传。他的数学思想集中体现在《九章算术》的“注”和“序”中。

刘徽具有朴素而明确的唯物主义思想。关于数学的来源，他说：“至于以法相传，亦犹规矩、度量可得而共，非特难也。”规矩是作图的工具，是空间形式；度量则是数量关系。这说明了数学方法来源于客观世界。他对正数、负数和分数起源的认识是正确

的，他说："两算（算筹）得失相反，要令正负以名之。"关于分数，他说，"物之数量不可悉全（整数），必以分（分数）言之，"指出了分数来源于实际，在客观上纠正了关于数的神秘主义观点。

毕达哥拉斯学派关于不可公度量(即无理数)的发现，当时认为是悖论，所以希腊人对数量关系往往望而生畏。我国由于没有提出类似的悖论，所以对数毫无顾忌地进行运算。《九章算术》的开方术曾提出"若开之不尽者为不可开"，若循"不可开"继续思考，有可能导致无理数之发现，可是接着提出"当以面命之"，即以$\sqrt{n}=a+r/a$（式中a为$\sqrt{n}$的整数部分,$r=n-a^2$）作为根的近似值，这就堵住了通向无理数之大门。刘徽认为这个方法不准确，提出求"微数"（实即十进小数）的方法。他说："不以面命之，加定法如前，求其微数。微数无名者以为分子，其一退以十为母，其再退以再为母。退之弥下，其分弥细，则朱幂虽有所弃之数，不足言之也。"①刘徽用"微数"逼近无理数之思想很重要，它不仅是计算圆周率的指导思想，而且在数学史上开创了十进小数的先河。

儒家崇尚往古的思想在数学中也有反映。但刘徽对古人的成就却持分析态度。比如，在此以前，一般是以"周三径一为率"（$\pi=3$），刘徽认为不准确（"徽以为疏"）；他进一步指出，"周三者从其六觚之环耳"②。意即$\pi=3$仅仅是圆内接正六边形一边之长。他批评有些人是"拙于精理"，是"莫肯精覈"是"学者踵古，习其谬失"③。

刘徽非常了解数学概念、公式和方法的一般性，他说："事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本干者，知发其一端也。"

① 钱宝琮校点：《算经十书》上册，第150页。

②③ 同上书，第104页。

《九章算术》原书过简，对各种算法的正确性缺少必要的说明，刘徽在为其作注时充分注意到抽象性和直观性相结合，提出“析理以辞”和“解体用图”相结合的方法。他说，“又所析理以辞，解体用图。庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣。”这里所说的“析理以辞”不仅指那些可以用计算的方法验证的论题，而且也用于那些不能用计算而只能用言辞进行逻辑推理证明的命题。“解体用图”是指用分割图形“以盈补虚”、“出入相补”的方法来验证各种公式的正确性。刘徽不仅为各种数学概念作了解释或定义，而且也注意到这些概念之间的逻辑联系。比如他说：“不有鳖臑，无以审阳马之数，不有阳马，无以知锥亭之类，功实之主也。”得出解决鳖臑（四面体）的体积是解决其它直线体体积的基础的结论。

在1.4节中已经提到，刘徽将先秦的极限思想首次用于几何计算，创造了“割圆术”，用以计算π和圆的面积，用无限逼近的方法求方根，还用无限分割的方法来验证某些求面积和体积的公式。唐初的王孝通评论说，“徽思极毫芒”，这决非过誉。

刘徽治学极为严肃，对复杂而一时不能解决的问题，他反复核验后记录下来，留给后人解决。他说：“欲陋形措意，惧失正理。敢不阙疑，以俟能言者。”他试图通过求“牟合方盖”的体积$V_{牟}$来计算球的体积$V_{球}$即其一例。刘徽已经证明了：

$$V_{球}=\frac{\pi}{4}V_{牟}。$$

在如何求出$V_{牟}$这一问题上虽然刘徽没有成功，但是，他的工作为以后计算球体积问题创造了条件。

南北朝时期的科学家祖冲之（429—500）继承了刘徽的割圆术，在数学史上首次算出$3.1415926<\pi<3.1415927$，还算得$\pi=355/113$这一很好的分数值。祖冲之的儿子祖暅在刘徽求$V_{牟}$工作的基础上，提出“幂势既同，则积不容异”原理（若二立体在

等高处的截面相等，则此二立体的体积相等），此原理被称为“刘一祖原理”。祖暅利用这一原理算出了“牟合方盖”即$V_{牟}$，再利用刘徽已经建立的$V_{牟}$与$V_{球}$之间关系的公式求出了球的体积$V_{球}$。

唐初王孝通（6、7世纪之间）的代表作是《算经十书》之一的《缉古算经》。该书开头附有一篇《上缉古算经表》反映了王孝通的数学观。对数学，他说：“其理幽而微，其形秘而约，重句聊用测海，寸木可以量天，非宇宙之至精，其孰能与于此者。”他对数学有两个重要的思想：其一，数学大有用处，是“为君上者司收黔首”（为皇帝统治平民百姓）的工具，其二，数学理论深奥，形式严格简炼，是宇宙间最抽象的学问。《缉古算经》虽然题量不大——只有20个典型问题，但却填补了《九章算术》的某些不足，是一部后来居上之作，其中涉及二次、三次和四次方程解的研究。我国传统数学对三次方程的研究甚少。祖冲之在其《缀术》中所说的“开差立”可能是解三次方程，但该书已经失传，从现有材料来看，王孝通是我国研究三次方程最早的人，比之研究同一类问题的阿拉伯学者奥马尔·海亚姆早五百年。

从汉初到唐末，中国古典数学同天文历法的密切结合是我国数学和天文学的一大特色。到了唐代已经出现了等间距和不等间距的二次内插法。中国古代对各行星的轨迹并不关心，但却能比较精确地算出它们在恒星背景上的位置。这不仅是中国古代天文学的成就，而且也是中国古代数学的成就。

3.中国数学的鼎盛（宋元时期）

从赵宋开国（960）到朱明灭元（1368），其间四百年左右，特别是13世纪下半叶，我国传统数学在已有的基础上发展到了高峰，涌现出许多代表性的人物和著作，其中主要有：秦九韶（1202—1261）的《数书九章》（1247），李冶（1192—1279）

的《测圆海镜》（1248）和《益古演段》（1259），杨辉（13世纪）的《乘除通变本末》（1274），以及朱世杰（13与14世纪之交）的《算学启蒙》（1299）和《四元玉鉴》（1303）等。秦九韶和李冶是举世公认的数学家。杨辉被誉为数学教育家。朱世杰则是宋元数学的集大成者。

（1）宋元时期的数学成就。

在计算技术方面，以杨辉的著作《乘除通变本末》、《日用算法》(1262)和《田亩比类乘除捷法》（1275）为代表，总结了唐中期以来主要适应商业发展的计算技术。在几何方面，出现了沈括（1030—1094）的“会圆术”（已知圆的直径及弓形之高求弦长和弧长的方法），秦九韶的“三斜求积术”（已知三角形三边之长求三角形的面积的方法），以及李冶的“勾股容圆术”（已知直角三角形两边之长计算各种容圆半径的方法）等。赵友钦（14世纪）的“割圆术”是从圆的内接正方形算起，边数逐次加倍，直算到$4\times2^{12}=16384$边形，证得$\pi=355/113$最为精密。赵友钦割圆术的“终不穷”思想比之刘徽的“不可割”思想是一个重要的进步。

但是，宋元时期数学最主要的成就则是解决各种具体问题的代数学的发展，主要有如下四个方面：

贾宪的增乘开方法和秦九韶的高次方程的数值解法 《九章算术》的《少广》章曾详细地叙述开平方和开立方的步骤，分别相当于解方程$x^2-a=0$与$x^3-a=0$（$a>0$）。刘徽将开平方推广为“开带从平方”，相当于解方程$x^2+px=q$（p、q均为正数）的正根。王孝通又将开立方推广为“开带从立方”，即求三次方程$x^3+ax^2+bx=c$（a、b、c均为正数）的正根。

根据杨辉的《详解九章算法》记载，宋初贾宪（11世纪）曾经创造求方程$x^n-a=0$（$a>0$，$n=2,3,4,\cdots$）的正根的两个方法：“立成释锁法”和“增乘开方法”。后一方法无论是

开平方、开立方，还是开n（n＞3）次方均可适用。由于用这种方法时，每议得一位商数，就要乘一次加一次，需要随乘随加，所以才叫“增乘开方法”。

“立成释锁法”中的“释锁”是宋代解方程（即开方）的别名；古代天文学家为推算各种天文数据把列出来的表格叫“立成”。因此，贾宪的“立成释锁法”就是利用一种表格上的数字来解决一般的开方问题，数学史家研究肯定“开方作法本源”（图1.13）就是贾宪开方法的“立成”。贾宪的著作均已失传，今天见到记载“开方作法本源”图最早的书是明代“永乐大典”（1407，抄录自杨辉的《详解九章算法》）。这是当 $n=0$、1、2、3、4、5、6时，二项展开式 $(x+a)^n$ 的系数表。今天西方称为“帕斯加三角形”（1654）。

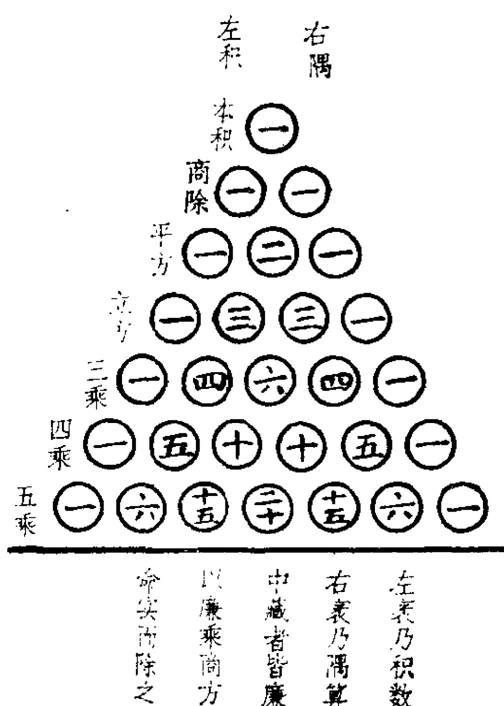


图1.13 （开方作法本原）

和贾宪同时代也许稍晚的刘益，在其著作《议古根源》一书中，创造“益积术”和“减从术”，即分别解方程 $x^2-px=q$ 和 $-x^2+px=q$（p、q均为正数），由于方程的系数可正可负，所以是对刘徽“开带从平方”的发展。杨辉称赞此二术“实冠前古”。

继贾宪和刘益之后，秦九韶在《数书九章》中把高次方程求正根的方法发展到十分完备的程度，主要有两点突破：第一，过去的方程，由于来源于求长度、面积一类的问题，所以总是把常数项规定为正，而秦九韶则规定“实常为负”，即常数项也可为负数；其它各项系数可正可负，也没有限制。第二，过去的方程一般到三次，而在《数书九章》中已到十次。对秦九韶来说，方程

的次数无关重要。秦九韶把解方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的方法叫“正负开方术”。具体步骤和贾宪、刘益的步骤基本一致，也是议得根的每位数后都要随乘随加。英国的霍纳于1819年重新得到此法（西方称为“霍纳法”）。

李冶的天元术和朱世杰的四元术 用代数方法解决实际问题，要经过“造术”和“开方”两个步骤。前者即今天的列方程。列出方程常常是解决问题的基础。后者即今之解方程。开方在古代是比较困难的问题之一，但是自从有了“增乘开方法”和“正负开方术”以后，解方程的问题已经解决了。相对而言，“造术”在没有数学符号的古代中国，矛盾显得突出。于是寻找一个比较简单的列方程的方法便提上日程。“天元术”的提出，解决了含一个未知数方程的“造术”问题。

据史书记载，南宋时期出现不少有关“天元术”的著作，但到明代大部分失传，今天已无法确定它的创造者。现在所看到讲“天元术”的著作只有李冶和朱世杰的各两部。

“天元术”就是根据问题的条件列出含一个未知数方程的方法，其中“立天元一为某某”即今天的“设x 为某某”。但在方程中，“天元”常常简写为“天”。另外，也用“太”（“太极”之简称）表示常数项。例如，今之方程 $x^2+3x+2=0$ 用分离系数表示成图1.14的形式。列出方程后，再按一定的程序去解。

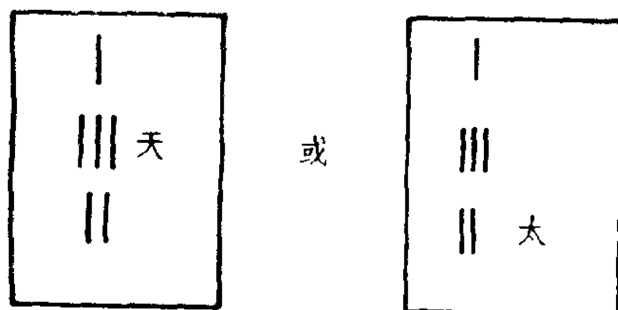


图 1.14

有了“天元术”很快就被李德载（13世纪）发展为天、地二元，即今天含有两个未知数的方程；被刘大鉴（13世纪）发展为天、地、人三元，即今天含有三个未知数的方程；被朱世杰再发展为天、地、人、物四元，即今天含有四个未知数的方程。当然，“四元术”也是用分离系数的方式表示的。至此，中国数学家已经触及到四元、高次联立方程。

秦九韶的大衍求一术 《孙子算经》卷下的第26题为中外数学史家重视。原题是：

> “今有物，不知其数。三三数之剩二；五五数之剩三；七七数之剩二。问物几何？”“答曰：二十三。”“术曰：三三数之剩二。置一百四十；五五数之剩三，置六十三；七七数之剩二，置三十。并之得二百三十三。以二百一十减之即得。凡三三数之剩一则置七十；五五数之剩一则置二十一；七七数之剩一则置十五。一百（零）六以上，以一百（零）五减之即得。”

前半部分是对本题的具体解法，后半部分是解这类问题的普遍原理。这一原理传到西方，被称为“中国剩余定理”或“孙子定理”。

在秦九韶以前，数学家和天文学家虽然对这个定理都很熟悉，但是没有人对它作出应有的发展。青年时代的秦九韶，随父亲居于都城临安（今之杭州），有机会出入太史局（当时天文历法的研究机构），又向“隐君子”学习数学，对孙子定理进行了深入的研究。他说：“数理精微，不易窥识，穷年致志，感于梦寐，幸而得知，谨不敢隐。”秦九韶首先定义了一组概念：定母（即3、5、7），余数（即2、3、2），衍母（即定母之积105），衍数（任意两个定母之积称另一个定母的衍数），乘数（即70、21、15），乘率（即2、1、1）。容易看出，以三个互质的数作“定母”时，求得“乘率”是最后求出答数的关键。秦九韶把

求乘率的方法叫“大衍求一术”。术语“求一术”在计算技术中早已有之，这里是借用。“大衍”一词来自《易经》，用以说明深奥难懂，似有神秘和故弄玄虚之嫌。

秦九韶对“孙子定理”作了如下三点发展：

第一，创造了求乘率的“大衍求一术”；

第二，将以三个数作定母推广到三个以上的数作定母（在他的《数书九章》中，曾用到八个数作定母）；

第三，将以三个互质的数作定母推广为任意三个数作定母。

孙子定理以其浓郁的趣味性吸引历代人们的广泛注意，并在古书中给予不同的名称，如鬼谷算、隔墙算、秦王暗点兵、剪管术和韩信点兵等，并以朗朗上口的数学诗的形式给出其“术”。自秦九韶对其作出重大发展以后，研究的人很多。比如，清代的张敦仁（1754—1834）、骆腾风（1770—1841）、时曰醇(19世纪)以及黄宗宪（19世纪）等都对“大衍求一术”有深入研究，特别是黄宗宪的《求一术通解》（1874）不仅文字简洁，而且理论清楚，是一部后来居上之著作。“大衍求一术”也被人译成英文、德文、法文等向西方介绍，产生极大的影响。德国数学家康托尔当看到介绍材料后，称赞秦九韶是“最幸运的天才”。当代美国科学史家萨顿在《13世纪的中国数学》（1973）一书中说，秦九韶是“他那个民族、他那个时代、并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”。

沈括、杨辉的垛积术和朱世杰的招差术 在《九章算术》和《张邱建算经》中，已有不少实用而有趣味的等差级数方面的问题。若将级数的首项、末项、公差、项数与和分别用 a、l、d、n、s表示，此二书中实际已有已知a、l、n求s的公式：

$$s=\frac{n}{2}(a+l)$$

已知a、n、s求d的公式：

$$d=\left(\frac{2s}{n}-2a\right)/(n-1)$$

唐代历法中已有已知a、d、s求n的公式：

$$n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2a}{d}-1\right)^2+\frac{8s}{d}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{2a-s}{2d}$$

自然科学家沈括（1030—1094）在其著作《梦溪笔谈》（1088—1095之间）卷十八中曾用“隙积术”计算酒店按一定方式堆放的酒坛以及累棋的总数。沈括的“隙积术”用现在的符号表示就是：

$$s=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

这是长方形垛求和的公式。式中a、b是上底的长和宽，c、d是下底的长和宽，n是高，s是其和。

杨辉在其《详解九章算法》（1621）中所说的“垛积术”与沈括的“隙积术”类似，不过杨辉所解决的问题更具体，计有如下四种：

果子垛（正方形锥体）：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (A)$$

方垛（正方形台体）：

$$a^2+(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(b-1)^2+b^2$$

$$=\frac{n}{3}(b-a)\left(a^2+b^2+ab+\frac{b-a}{2}\right) \qquad (B)$$

三角垛（三角形锥体）：

$$1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(C)

果子垛（长方形台体）：

$$ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)+\cdots$$
$$+(c-1)(d-1)+cd$$
$$=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-d) \qquad \text{(D)}$$

杨辉的（D）式同沈括的“隙积术”完全一致，且（A）、（B）、（C）为其特例。

沈括和杨辉的公式，今天看来均属二阶等差级数求和。朱世杰在他的《算学启蒙》和《四元玉鉴》中，已有计算三、四、五阶等差级数求和的方法，并把这种方法称为“招差术”。我们用现代符号摘录一部分如下（式中n表示项数）：

$$1+4+10+20+\cdots+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$
$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$1+5+15+35+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$1+6+21+56+\cdots+\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

需要注意的是以上三式之间的联系——上一式是下一式的通项。如果递推下去容易得出：

$$\sum_{r=1}^{n} C^{p}_{r+p-1}=C^{p+1}_{n+p}$$

当 $p=3$、4、5时，就分别得到上边三式。有的数学史家建议

把上式称为“朱世杰等式”。中国古典数学对等差级数的研究，从《算经十书》开始到朱世杰是近代积分法出现以前的高峰。

（2）宋元时期的数学哲学①。

宋元数学成就显著，是举世公认的。相对来说，宋元数学家关于数学哲学的论述并不多。我们只能在秦九韶和李冶的算书序和跋中略见一二，朱世杰与杨辉的有关论述更少。

两宋时期是程朱理学（道学）的产生、发展和盛行时期。这种学说以传统儒学为核心，并吸收了道教和道家某些理论。由于程朱理学从宋代以后成为我国封建社会的官方哲学，因此，宋元数学也打上了这一哲学印记。比如，理学家邵雍接受了《老子》中“三生万物”的思想，提出：“有极，一也；不动生二，二则神也。神生数，数生象，象生器。”理学家还接受了历代道教对《周易》神秘主义解释而形成的“象数学”。理学大师朱熹在他撰写的《周易本义》卷首的四幅图（河图，洛书图，伏羲八卦次序图，伏羲六十四卦次序图）代表了宋代理学的象数学。这种神秘主义的象数学在秦九韶的《数书九章·序》中有明显的表现。

秦九韶在“序”中论及数学的产生和应用时说：“其用本太虚生一而周流无穷，大则可以通神明，顺性命；小则可以经世务，类万物，讵（岂）容以浅鲜窥哉？……爰自河图、洛书闿（开）发秘奥，八卦、九畴错综精微，极而至于大衍，皇极之用，而人事之变无不该，鬼神之情莫能隐矣。圣人神之，言而遗其粗，常人昧之，由而莫之觉，要其归，则数与道非二本也。”

在数学如何产生这一问题上，秦九韶主张“数与道非二本”，即皆“本太虚生一”，这显然是不正确的。在数学应用问题上，他认为有“大”有“小”。“大则可以通神明，顺性命”似有神秘色彩，但是如果将“通神明”理解为数学可以“明察变化莫

① 这部分参考了孔国平的博士论文：《宋元时期的数学思想》。

测的事物之间的奥秘”，而将“顺性命”理解为“顺应事物本性发展变化的规律”，似更符合他的原意。秦九韶在“序”中还明确提出“信知夫物莫不为数”以及“数术之传，以实为体”的正确见解。他从自己毕生的数学研究中也认识到“所谓通神明，顺性命，固肤末于见，若其小者窃尝设为问答，以拟于用。”就是说，在他的研究中并没有找到能“通神明，顺性命”之“大”者，因此，他著书立说只能是一些“经世务，类万物”的“小”者。他的《数书九章》中共有81个问题，分成九类，每类9题，主要内容都是“以拟于用”的应用问题。

在宋元数学家中，受道家思想影响比较明显的是李冶。一般来说，道家崇尚自然，这一点有利于把人们引向自然科学，在客观上对李冶抵制唯心主义、形成朴素唯物主义数学观有重要影响。

当时的士大夫因受儒家影响而普遍认为“数为六艺之末”，视数学为“贱技”，无补仕途。但李冶在其《测圆海镜·序》中则说：“由技兼于事者言之，夷之礼，夔之乐，亦不免为一技；由技进乎道者言之，石之斤，扁之轮，岂非圣人之所与乎？”①意思是说，从技艺用于实际来说，圣人所作的礼和乐是一种技艺；从道寓于技艺来说，工匠所用之工具也是圣人所称赞的。李冶这一思想显然来自《庄子》中“技兼于事”以及“道之所在，圣人尊之”的思想。李冶也充分认识到数学的用处，他在《益古演段·序》中说：“术数虽居六艺之末，而施之人事，则最为切务。”李冶还认为数虽深奥，却是可以认识的。他说：“谓数难穷，斯可；谓数不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥中，固有昭昭者存。夫昭昭者，自然之故也。非自然之数，其自然之理也。”

---

① 夷，黄帝臣名；夔（kui），舜臣名；石、扁，古工匠名；斤、轮，古工具名。

(《测圆海镜·序》)这一思想也来源于《庄子》中"夫昭昭生于冥冥，有伦生于无形"的思想。李冶正是基于这一深刻的理解才进一步说："数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦末如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。"在这里"乾端坤倪"极言数学应用之广；"神情鬼状"极言数学理论之深。这一段话是说，应当按数学本来面目去认识数学，只有努力探索数学内部规律，才能得到具有广泛应用的数学原理。

在杨辉的著作中，虽然涉及数学思想和数学哲学的语句较少，但是他的著作对提高运算效率、普及数学知识起了破天荒的作用，这本身就是对当时数学神秘主义的批判。

朱世杰是集宋元数学大成的数学家，但留传下来的著作没有自序。《四玉玉鉴》刊刻时有莫若、祖颐各写的一篇序文。莫若的序文说："数一而已，一者万物之所从始。故而一太极也，一而二，二而四，四而八，生生不穷者岂非自然而然之数耶？河图洛书泄其秘，黄帝九章著之书。"这是象数神秘主义，但和朱世杰不相干。祖颐的序文说："按天地人物立成四元，以元气居中，天句、地股、人弦，物黄方，考图明之，上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式。"这段文字除了勾画出四元术的轮廓以外，在我国数学史上第一次明确提出数学具有"用假象真，以虚问实"的特征。

在宋元数学思想中，自然科学家沈括的有关思想是值得一提的。沈括对广大群众的智慧有一定的认识。他说："技巧、器械、大小、尺寸、黑黄、苍赤，岂能尽出于圣人！百工、群有司、市井、田野之人，莫不预焉。"(《长兴集·上欧阳参政书》)所以他的一生，重视实际，比较接近中下层群众。对自然科学中的许多问题，他亲自观察，动手实验，写出被誉为"中国

科学的里程碑”（李约瑟语）的《梦溪笔谈》。沈括明确提出：“耳目能受不能择，择之者心也。”（《长兴集·孟子解》）意即，人的感官只能接受客观世界的信息，但是不能辨别，辨别要靠理性思维。这种认识是正确的。他还说：“大凡物有定形，形有真数。方圆端斜，定形也；乘除相荡，无所附益，混然冥会者，真数也。其术可以心得，不可以言喻。”（《梦溪笔谈》卷七）明确提出数源于形，形源于物，一旦从物中抽象出数，就作为独立的实体（“无所附益”）。他还指出：“算术不患多学，见简即用，见繁即变，不胶一法，乃为通术。”（《梦溪笔谈》卷十八）指出了对于数学方法，既要广泛地掌握，又能灵活运用，而不可生搬硬套。

综观我国传统数学的载体，自赵爽、刘徽至李冶、朱世杰，大都是平民或隐士。他们不入仕途，淡于功名利禄，勇于离经叛道，甘心从事六艺之末的贱技数学研究，为我国数学的发展和普及作出了重要贡献。

4.中国数学的停滞与中西数学的融合［明清（1840年以前）时期］

（1）明代珠算的普及和传统数学的滑坡。

我国传统的计算工具是算筹。用筹作算易乱，不易提高计算效率，也不易普及。到了元代，在算筹的基础上发生了一次重要变革——产生了今天仍有实用价值的算盘。由于算盘是在算筹的基础上产生的，所以珠算保留有许多算筹的特点。比如：下珠表示一、上珠表示五，仍用算筹口诀，以及用空档表示零等。

算盘的发明者到底是谁，至今无法确切回答，这恰好说明它可能是一代人创造的。它的发明时间问题，元末陶宗仪在他的《南村缀耕录》（1366）中有一段文字：“凡纳婢仆，初来时曰擂盘珠，言不拨自动。稍久曰算盘珠，言拨之则动。既久曰佛顶珠，言终日凝然，虽拨亦不动。此虽俗谚，实切事情。”文学作

品中的比喻，既要有典型性，又要大众化。由此可知，珠算至少在元代已经相当普及。明洪武四年（1371）的书中已有算盘图。

适应时代商业发展的需要，在15～17世纪的两百年内，有史可查的计算书籍计五六十种，今天尚存的也不下十余种，其中最主要的是吴敬（15世纪）的《九章算法比类大全》（1450）十卷和程大位（1533—？）的《算法统宗》（1592）十七卷。特别是程大位的书影响很大。该书的主要特点是：将所有算法以及古典数学中的典型问题，皆用数学诗的形式叙述，引人入胜。程大位的后代、清初的程世绥在翻刻本的序言中说："这本书出版后，风行国内一百几十年，凡讲算法的人，几乎人手一册，就像考举的人对待四书五经一样，奉为经典。"至今民间一些老一辈人还能背诵其中许多有趣的"难题"。算盘这一简单的计算工具，即使在电脑相当普及的今天，仍然发挥巨大作用。报刊呼吁："珠算是个宝，依然不可少。""切莫让电脑代替孩子们的头脑。"①

宋元数学在明代除计算技术得到发展外，其中先进的、艰深部分在明代出现停滞，甚至像唐顺之（1507—1560）和颜应祥（1483—1565）这样的数学家也一窍不通。颜氏自称"应祥幼性好数学"，但他在注释李冶的《测圆海镜》时说："虽立天元一，反复合之，而无下手之术。"于是他就把该书有关天元术的细草完全删去。对此，清代天文、数学史家阮元评论说："删去细草一节，遂贻千古不知而作之讥，惜哉！"（《畴人传》）至于四元术和大衍求一术等，当时几乎没有人能看懂，出现了数学滑坡。

宋元数学的主要部分在元末以后为什么滑坡？这个问题已经引起国内学者的思考和研究。看来既有内因（传统数学本身的局限性），又有外因（社会方面的原因）。

---

① 见1989年9月6日、1990年7月27日《光明日报》。

前已述及，我国传统数学主要是以算筹为工具发展起来的。筹算的核心是算，相对而言，证明居于次要地位，为计算服务。我国古代数学家在计算上表现了高度技巧，凭借这种优良的计算工具发展了特色独具的中国古典数学。但是也应看到在筹算优越性的背后也隐藏着不足。随着数学的发展，这种不足就暴露得更加明显。比如，用算筹只能表示一般意义上的量，难于表示更高层次抽象的量，更无法进行数学所必须的逻辑论证。刘徽已经意识到数学逻辑推理的重要性。比如，他在《九章算术·商功章》的第15个问题（计算阳马的体积）的"术文"中说："数而求穷之考，谓以情推，不以筹算。"这种"以情推"的思想后世没有给予应有的重视和发展。

数学的形式化是其重要特征之一。我国古典数学是以算筹为工具，而算筹是无需数学符号的，没有数学符号，数学一般原理只能用语言文字表述，这当然不如用符号表述简捷清楚。

我国有的数学史家指出，传统数学以"寓理于算"为重要特征。高度发达的宋元数学也是如此。比如，秦九韶对线性方程组的矩阵解法虽无一般性的证明，但他的解题步骤表明，他是在进行严格的同解变换；解题过程令人信服。这种朴素的"寓理于算"的思想符合人们的认识过程，在数学发展初期，有其必然性。但是随着数学的发展，它的局限性就暴露了出来，并越来越明显。宋元数学的主导方面仍是"算"，相对而言，对"理"阐述得不够，使后人难于从其复杂的"算"中悟出其中普通之"理"，一旦算法失去实际需要，自然就无人问津了。

上述传统数学局限性的总和，充其量只能使数学停滞，实际上，到了明代是后退，后退的主要标志是已有的天元术、四元术和大衍求一术几乎失传。造成这种情况的原因就不在于数学本身而在于社会原因了。

从元末开始，数学滑坡，自然同经济落后、社会动荡、民不

聊生有关。但是更直接的原因是社会思想和封建统治者明确地采取了不利于数学发展的政策，八股取仕是这一政策的直接体现。

科举制度自隋代开始，考试内容各个时期并不一致。元代一度废除，元末（1314年）又恢复，但考试内容以朱熹注的四书为主；不久又发展为完全以四书五经命题，用八股文格式，引导知识分子远离自然科学。知识分子为了功名利禄，只能埋头于四书五经，在儒家经典中寻章摘句，空谈三纲五常的封建伦理。正如数学家丁巨（14世纪中期）所说："时尚浮辞，动言大纲，……士类以科举故，未暇笃实。"（《丁巨算法》）顾炎武（1613—1682）痛斥说："八股取仕，等于焚书；而败坏人材，有甚于咸阳之郊所坑者……。"（《日知录》）这些并非夸大之词。

理学在宋代不过是一个哲学流派。但元末以后，朱熹的理学逐渐成为官方哲学，且一再强化。该学说的纲领是"存天理，灭人欲"，在社会上形成了远离、卑视科学的思潮，使人不愿涉足传统数学。偶有勇气涉足数学的人，又受邵雍等所宣扬的神秘主义（如象数学）的影响，不愿或忽略探讨数学中较深的"理"，使传统数学的艰深部分后继无人，仅仅停留在计算技术算盘的普及范围。正如徐光启所说："算数之学，特废于近世数百年间耳。废之缘有二：其一为明理之儒士苴天下实事；其一为妖妄之术谬言数有神理。"（《同文算指·序》）明确指出"明理之儒"和"妖妄之术"是阻碍我国数学发展之主要原因。

（2）明清之际西方初等数学的引入及其影响。

我国引入西方初等数学是由当时的内外因素决定的。

明代末期（16世纪末期），我国虽有某些资本主义经济的萌芽，但是封建经济仍居绝对优势。这时的西方，某些国家已经步入资本主义社会。落后的经济基础，决定了落后的科学水平。这时的西方，初等数学已基本定型，特别是几何学已经成熟。我国知识界的代表人物有了解西方科学知识的愿望。特别是自朱明开

国以来沿用大统历，该历因使用的时间过长而误差越来越大，预算的日、月食失准，所以主张改历的人日益增多。另外，西方自宗教改革以后，旧教势力削弱。旧教为了挽回失去的势力，便积极向外传教。就这样，在西方初等数学定型的基础上，在我国需要了解的情况下，西方的初等数学随西方历法一起由教士传入我国。

来华最早的教士是意大利的利玛窦。他是德国数学家克拉维斯的学生，曾是伽利略的数学老师。他于1582年来华，当时正值我国议论改历的高潮。利玛窦敏感地发现，中国文化宝库中缺少西方近代科学，于是就向罗马教廷建议派遣懂天文历法的教士来华，用数学来争取中国的人心。所以明清之际，先后来华的教士如：龙化民（1597年来华）、邓玉涵（1621年来华）、汤若望（1622年来华）、罗雅谷（1622年来华）、穆尼阁（1646年来华）、南怀仁（1659年来华）等，皆通天文历法和数学。教士们为了取得中国当局的信任，并站得住脚，一般都“入乡随俗”，比如：改成汉姓、汉名，对皇帝称臣，行中国礼，室内不挂耶稣像等。

经这些教士先后介绍到中国的数学包括计算技术、代数（最初直译为“阿尔热八拉”等名）、三角、对数和几何等各个方面，相当全面。其中引入最早、且对我国学术界影响较大的是欧几里得的《几何原本》。

《几何原本》由“利玛窦口译，徐光启笔受”，历时近两年（1606—1607）译完其前六卷。徐光启拟全部译出，但利玛窦认为应适可而止，因利玛窦的实际目的在于传教。

在接受西方自然科学方面，徐光启（1562—1633）起了主导作用。徐光启不仅是一位杰出的天文学家、数学家，而且还是一位农学家和军事家，一生著译甚多（他的儿子和孙子收集到的著译目录共60余种），其中主要的是《崇祯历书》、《农政全书》以

及《几何原本》（前六卷）。

“几何（学）”的拉丁文是geometria，来自希腊文的“土地”和“测量”二字，所以原意为“测地术”。徐光启将其译成“几何”。汉语几何既有数量、多少之意，又同geo谐音，堪称绝妙，通用至今，且东渡日本。

在《几何原本》中，徐光启所用的“界说”和“公论”分别是今天的“定义”和“公理”。今天几何中许多名词，如几何、点、线、直线、曲线、垂线、对角线、面、平面、曲面、角、直角、钝角、锐角、相似、外切、三角形、四边形等等，皆是他制定的，今已定型通用。

徐光启认为，科学技术能富国强兵，有益民用。他认为数学应用非常广泛，他在《度数旁通十事》中说，凡“有形有质之物，有度有数之事，无不赖以为用”，并具体指出数学可用于历法、水利、测量、音乐、军事、建筑、财政、机械、地图、医学、统计等方面。

徐光启对《几何原本》的逻辑体系极为赞赏，他说：“（原本）由显入微，从疑得信，盖不用为用，众用所基。”（《几何原本·序》）后两句是说，那些看起来无用的公理，正是“所用所基”。他称赞《原本》是“万象之形囿，百家之学海”（同上书），学习此书，能使人“祛其浮气，练其精心，……发其巧思，故举世无一人不当学”（《几何原本杂议》），并且预言“百年以后，必人人习之”。他还说，“此书有四不必：不必疑，不必揣，不必试，不必改。有四不可得：欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。有三至三能：似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难。易生于简，简生于明，综其妙在明而已。”（《几何原本杂议》）当然，今天看来似有夸大。但它对一贯闭关锁

国、夜郎自大的中国士大夫来说，无疑是一次巨大的冲击，他们第一次承认西方自然科学有用。梁启超曾评论说："承认欧人学问之有价值，实自兹始也。"（《中国近三百年学术史》）梁启超还称赞《原本》是"字字精金美玉，是千古不朽之作"。其实，徐光启对西方科学并不是持全盘接受的态度。以其译历为例，他说："欲求超胜，必须会通。会通之前，先须翻译，……翻译既有端绪，然后令深知法意者参详考订。"（《明史本传》）可见，徐光启既与当时对西方科学一概拒绝的保守派不同，亦与后来拜倒在西方科学之脚下的全盘西化派有别。

（3）清初中西数学的融合。

明末西方科学引入中国，引起我国知识界的极大兴趣。清室入主中国后，一些知识分子不愿到清政府做官而致力于科学研究，这方面以梅文鼎（1633—1721）为代表。

梅文鼎① 的父亲因不愿到清室为官而过着隐居生活。梅文鼎继其父志，除读"四书五经"之外，还学习天文、数学。他的一生把西方的天文、数学同我国传统的天文、数学结合起来，融会贯通，作出重大贡献。他去世后的第三年（1723），一个名叫魏荔彤的人把他的遗著搜集在一起，并请当时的数学家杨作枚（17、18世纪之间）补充整理，汇编成《梅氏历算全书》并刊刻。1761年，由其孙梅瑴成（1681—1763）进行挑选，选出23种共61卷，并按一定的逻辑顺序编成《梅氏丛书辑要》，使人"展卷了然，即初学无难阅读"。他的著作包括算术、代数、三角与几何各方面的内容与应用。梅文鼎是清初集中西数学大成的人物，享有"历算第一家"的声誉；也有人说，他同英国的牛顿、日本的关孝和一起，是17世纪三大数学家。此外，梅文鼎及其弟、儿子、

① 有关梅文鼎的材料参考了刘钝的论文：《清初计算大师梅文鼎》，载《自然辩证法通讯》1986年第1期。

孙子、曾孙四代十余人皆通数学，形成数学家族，堪与瑞士的伯努里家族相媲美。

梅文鼎对待西学态度的主导方面是“技取所长，而理唯其是”，意即只要技术先进，理论正确，就可以采用；他还说：“法有可采何论东西，理所当明何分新旧，在善学者知其所以异，又知其所以同。去中西之见，以平心观理，则弧三角之详明，郭（守敬）图之简括，皆足以资探讨而启深思。务集众长以观其会通，毋拘名相而取其精粹。”（《堑堵测量》，卷二）

在数学本体论问题上，梅文鼎继承了宋元数学家“数术之传，以实为体”思想。他说：“数学者征之于实，实则不易，不易则庸，庸则中，中则放之四海九州而准。”（《中西算通·序》）意即数学来源于客观实际，符合中庸之道，所以是普遍真理。他还指出：“礼乐代更，而方圆不易；书契形名世殊方别，而奇偶自如，数之不亡不能亡也。”说明社会制度可以改变，但是数学“不易”、是“不能亡”的。梅文鼎把当时的数学分为两类：“数学有九（九章算术），要之则二支：一者算术，一者量法。量法者长短远近以求，方圆弧长之积以求，立方浑圆堆垛之形以求。……算术者稍息盈虚，乘除进退，以差多寡，验往测来……。”这里的“量法”指物体的空间形状，包括一维的长短远近，二维的方圆弧长之积，三维的立方浑圆堆垛；“算术”就是数量关系；实际上是说数学是空间形式和数量关系的学问。

在中西天文数学的关系问题上，他经过详细地研究，在各个方面进行了同和异的比较后，提出“西学中源论”。他说：“谁知欧罗言，乃与周髀同。”比如，在天文历法方面，中法的“五星迟留逆伏”和西法的“本轮均轮说”相同，中法的“岁差”同西法的“恒星东行”相同，中国的句股术与西方的几何相同等等。他的孙子梅瑴成后来补充说，中国的借方根与西方的阿尔热巴拉（代数）相同。梅文鼎并不否认在许多方面西法优于中法，

但这是青出于蓝而胜于蓝。

梅文鼎由于博学而受到康熙隆重礼遇，并题赠“积学参微”四字以表彰他在天文数学方面的深刻造诣。康熙对其评价是：“历象算法朕最关心，此学今鲜知者，如梅文鼎仅见也，其人亦雅，惜乎老矣。”

梅文鼎苦心主张的“西学中源论”，一方面表明中国传统科学的先进、悠久，另一方面又折衷了明末以来中西之争；既满足了维护中华科学优越的正统观念，又不排斥西方科学诸多先进这一客观事实，完全符合统治者的愿望。

综观梅文鼎对西学的态度，他与徐光启等无所顾忌地介绍西方的数学不同。他既想学习西学，又怕背上“数典忘祖”之骂名；他既宣扬“数学征之于实”的唯物史观，又流露出“大易含参两，灵秘开马图”的唯心色彩；他的一生既淡泊于功名享乐，但对康熙的隆遇却感恩戴德。他介绍西方笔算，体现了他引进西方优越算法的进取精神，但同时为了适应“中土圣人之旧”而将其“易横为直”，这又是保守性之表现；他出于民族自尊心和爱国情操而提倡“西学中源论”，使之成为封建帝王维护其统一的思想武器，又似有科学沙文主义味道。所有这些矛盾，都可以从他所处的社会地位（是无职无权的民间学者）和当时政治环境（清初对知识分子的高压政策）得到解释，是中国科学界对传统的中国科学在西方科学冲击下面临两难处境的反映。

西算引入后，经过清初一段时间的消化，1723年出版了一部总结中西数学的巨著——《数理精蕴》，以康熙御编之名而流传。

康熙一生爱好自然科学，晚年仍致力历算研究，所以在他的周围聚集了一批著名的天文学家和数学家。1711年，康熙召见泰州进士、数学家陈厚耀（1648—1722），并命陈在南书房供职。不久陈向康熙建议“请定步算诸书，以惠天下”，立刻得到康熙

的同意。康熙还说，“汝尝说梅瑴成学甚深，今命来京，与汝同修算法”，于是调梅瑴成亦到宫中，同陈厚耀、何国宗（？—1766）、明安图（蒙族，？—1763）一起从事编书工作，并由何国宗、梅瑴成任汇编（即今之主编）。从1713年开始到1722年全部编完，计编出《律吕正义》5卷，《历象考成》42卷，《数理精蕴》53卷，三部书合称《律历渊源》，于1723年出版。在编写过程中，康熙极为重视，《清史稿·时宪志》说："所纂之书，每日进呈，上（康熙）亲加改正。"

《数理精蕴》上编5卷"立纲明体"，下编40卷"分条致用"，表格4种八卷，共53卷。该书全面地介绍了几何、实用算术、代数、对数以及比例，是一部大型的初等数学全书。全书主要是介绍西算，也有不少中国古典数学中的应用问题，但是解答时依据新法给出。

《数理精蕴》的数学思想集中在第一卷，包括"数理本源"和"周髀经解"两节，借以说明中国数学之本源及其历史的悠久。该书继承了宋元以来河图、洛书是数学本源的思想。"数学本源"说："粤稽上古，河出图，洛出书，八卦是生，九畴是叙，数学于是乎肇焉。""周髀经解"认为，《周髀》中周公同商高对话的264个字是"成周六艺之遗文"，故详加注解。首段称："旧注文多舛讹，今悉详正，辩于算书之首，以为数学之宗，使学者知中外本无二理焉尔。"不过注解多穿凿附会，价值不大。需要提及的，《数理精蕴》主编之一的梅瑴成于80岁（1760）高龄之时，增删程大位的《算法统宗》，他认为数学著作不是阴阳术数之书，所以将该书卷首有关河图洛书的字句全部删去。这说明梅瑴成至少在他的晚年已认识到此说之荒诞。

（4）清中复古思潮下的数学。

从雍正即位（1723）到鸦片战争（1840），中间一百余年，我国数学界同其它学术领域一样，兴起复古思潮，对传统数学进

行挖掘、整理和研究。产生复古思潮的主要原因有两个方面。

第一，自明末到清初，大批教士来华传教，在客观上向我国介绍了包括数学在内的西方科学，引起我国学术界的重视。因为这时引入的数学主要是初等数学，所以消化、吸收并不十分困难。《数理精蕴》的出版（1723）标志吸收阶段的结束。1704年，罗马教皇突然颁布教令，对传教方法加以限制。从此，教士在华逐渐受到冷落，不如过去那样受到士大夫的欢迎。接着清政府接受浙闽总督满宝的奏章，于雍正元年宣布除在钦天监供职的少数教士外，其它洋人教士一律驱逐到澳门，不许擅入内地。从这时起的一百余年实行闭关政策。在西方科学高速发展的时代，中国既不派留学生，不培养翻译人才，又不兴办近代化的学校，所以驱赶教士在客观上堵塞了引入西方科学的渠道。

第二，清室入主中国，一直担心汉族反抗，所以对汉族知识分子采取了“高压”与“怀柔”相结合的政策。如果说在康熙时代以实行笼络怀柔政策为主的话，从雍正起则实行高压为主的政策。据记载，康、雍、乾三代的文字狱达一百多起。作为高压政策的补充，由政府组织人力编辑大型丛书：《古今图书集成》和《四库全书》，提倡、鼓励考证。在这种形势下，中国知识界不敢涉足经世致用之学，研究古籍、进行考证是最安全的选择。大批知识分子被吸引到对古籍的挖掘、考证、注疏和校勘工作，形成了从事考证的“乾嘉学派”。“乾嘉学派”的兴起，是上层建筑对科学文化起反作用的一个例证。

《古今图书集成》的编纂起于康熙末年，雍正四年（1726）完成，其中收集到数学古典著作仅有《周髀算经》等7部计23卷。《四库全书》的编纂是在乾隆年间进行的，全书共收书3503部，计79337卷。由于参加者戴震（1723—1777）、李潢（？—1811）和庄存与（1719—1788）等都懂数学，所以收入的数学书籍比《古今图书集成》多得多，计有唐末以前的数学著作10部，

宋元数学3部，明代数学4部，以及康熙年间的数学书，并由官方以珍本刊印。从此，已经散失的《算经十书》全部搜齐，其中某些错误得到校勘；长期被人遗忘的宋元数学得到挖掘。在这项工作中，戴震起了重要作用。阮元在《畴人传》中评论说："缜密简要，准古作者，而又网罗算氏，缀辑遗经，以绍前哲，用遗来学，盖自有戴氏，天下学者，乃不敢轻言算数，而其道始尊，然则戴氏之功，又岂在宣城（梅文鼎）下哉。"

在整理古算的基础上，涌现了一些优秀的数学家，主要有焦循（1763—1820）、汪莱（1768—1813）和李锐（1773—1817）（以上三人称"谈天三友"）、项名达（1789—1850）、董祐诚（1791—1823）以及戴煦（1805—1860）等。他们在古算的基础上作出许多成绩，如三角函数的级数表示法，对数造表方法，方程中的符号法则和根与系数的关系等。这些成就虽然晚于西方，但在闭目塞听的情况下是独立作出的。在复古思潮下，学者整理古典经学，校注先秦诸子著作，辨伪书、佚遗书，这对继承和弘扬中国传统文化很有必要。但是，也应看到，这一工作投入的人力过多，消耗物力过大，效率不高，有人批评说，这项工作"至少一半算白费"，这一历史教训应当记取。

1840年以后，帝国主义用炮舰打开了中国长期关闭的大门，西方已经基本成熟的微积分开始被引入中国。从此，中国出国的留学生也日益增多。中国传统数学已逐渐溶汇到世界数学洪流之中，结束了中国古典数学的历史，并进入现代数学阶段。

第二章　近代部分

2.1　解析几何和射影几何的产生、发展

1.解析几何基本思想的酝酿和产生

解析几何以及对数、微积分，是17世纪数学的三个主要成就。它们的产生不是偶然的，正如恩格斯所说，是那个“伟大的时代”的产物。解析几何学的产生，是数学由常量数学发展到变量数学的转折点，也是近代数学的开端。

一般说来，解析几何学是用代数方法研究一次、二次曲线和曲面的一门学科，所以它的名称应是代数几何（今之代数几何是另一门数学）。在17世纪以前，虽然希腊的《几何原本》（公元前3世纪）用几何的形式叙述了当时的代数内容，而中国的《海岛算经》（3世纪）和《缉古算经》（7世纪）等又用代数方法去解决几何中的问题，但是这个时期的代数和几何仍是独立的，还没有达到有机的结合，所以还谈不上用代数方法研究图形的性质。

所谓代数和几何的有机结合，是指解析几何的两个基本思想：通过平面坐标系建立数对和平面上点的联系，以及通过平面坐标系建立带有两个未知数的方程同平面曲线的联系。从这一认识出发，欧洲在中世纪后期已有解析几何思想的一些萌芽。

继阿拉伯之后，在欧洲中世纪后期，除了三角学与代数学已分别被确立为一门独立的学科外，经院哲学家对无限和运动思辨式的争论已成时髦，他们对“形态幅度”(latitude of form)的研究则是对运动研究的具体表现。所谓“形态”一般指可以变

化且具有某种“强度”的概念，如速度、加速度、密度以及光的强度等。如果仅从量的方面考虑，就是今天的变量；“形态幅度”就是研究“形态”（即变量）具有某种性质的“强度”（变化的程度）。所以形态幅度概念实际上就是今天的变量与函数概念的早期形式。

同解析几何基本思想有关的研究，主要体现在14世纪尼科尔·奥雷斯姆的著作之中。奥雷斯姆不仅最早用分数作指数，而且在他的著作《论均匀与非均匀的强度》（约1350）和《论图线》等著作中，对希腊人用经线和纬线表示地面上地理位置的思想作了发展：取水平线上的点表示时间，并称之为“经度”；过该点垂线之长度表示对应时刻的速度，并称之为“纬度”。这就是奥雷斯姆提出的“图线原理”，也是现代数学中函数图形的最初形式；他的“经度”和“纬度”概念也分别是现代坐标系中横坐标和纵坐标的早期形式。奥雷斯姆也是用线段的长度表示物理量（如速度、密度和温度等）大小的第一个人。他为了表示一个在O点的速度为OA，减速到B点速度为零的运动所经过的距离，画出了“速度——时间图”（图2.1）。他指出，由AB中点E所确定的矩形OBDC同三角形AOB的面积相等。而△AOB的面

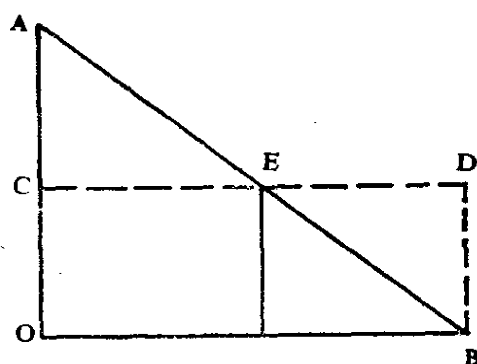


图 2.1 （速度——时间图）

积表示非匀速运动的距离，矩形OBDC的面积表示以1/2 OA为速度作匀速运动的距离。伽利略在他的《关于两门新科学的对

话·第三天》（1638）的开头也用图2.1说明同一个问题。从用线段的长度表示速度大小以及将二维面积等同于一维距离可以看出，他们已经模模糊糊地有了变量和用线段表示物理量的思想。

我们知道，平面解析几何的主要内容是二次曲线即圆锥曲线，而圆锥曲线早在阿波罗尼的《圆锥曲线论》（公元前2、3世纪）一书中已有相当充分的研究。但是符号代数则直到16世纪，以韦达的工作为标志才真正产生。在初等几何学早已定型，符号代数已经产生的条件下，在人们的学术思想获得解放的那个“伟大的时代”，人们把代数学同几何学有机地结合，提出解析几何学的两个基本思想，开拓出一门崭新的数学领域——解析几何学就不是偶然的了。今天人们公认这一开拓性的成就以费尔马和笛卡尔的工作为标志。

费尔马出身于商人家庭，在大学时代学习法律，一生以律师为职业，并兼任所在地区议会议员。数学是他的业余爱好，而且在30岁以后才认真注意。但是他对数论、概率论和解析几何均作了开创性的工作，也是微积分先驱之一，被人称为“业余数学家之王”。有人说17世纪是费尔马的世纪。

费尔马关于解析几何的主要著作是《平面和立体轨迹引论》（写于1629—1636年，死后14年即1679年出版）。“立体轨迹”指不能用尺规作出的曲线，所以与现在的含义不尽相同。他在《引论》的开头写道：“毫无疑问，古人对于轨迹写得非常多，……可是，……他们对于轨迹的研究并不是那么容易的。原因只有一个，这就是由于他们对轨迹没有给予充分而又一般表示的缘故。”① 他认为要给予轨迹以一般的表示，只能求助于韦达的符号代数。如何用韦达的代数方程 $f(x, y)=0$ 表示轨迹即曲线呢？费尔马说：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们

① 转引自中外数学史编写组：《外国数学简史》，第306页。

就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就绘出一条直线或曲线。”①这段话集中体现了费尔马的解析几何思想，被称为“费尔马原理”。对于费尔马来说，方程 $f(x,y)=0$ 中两个未知量 x、y 不是两个数，而是两个线段。其中第一个线段 x 处于水平方向，再在该线段的端点作第二个线段 y（二者不一定垂直），那么第二个线段 y 的端点就描绘出对应于给定方程的曲线（图2.2）。费尔马根据这个原理指出了如下方程（用今天之记号）的图形：

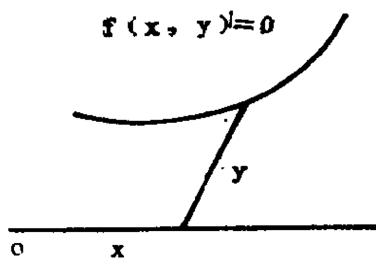


图 2.2

$dx=by$	表示一条直线
$c(a-x)=by$	表示一条直线
$b^2-x^2=y^2$	表示一个圆
$a^2-x^2=k^2y^2$	表示一个椭圆
$a^2+x^2=y^2$ 和 $xy=a$	各表示一条双曲线
$x^2=ay$	表示一条抛物线

当然，在费尔马的“坐标系”中，只有横座标轴，纵座标轴没有明显地划出来，二者也不一定垂直。由于没有负数概念，所以无法表示整个曲线。因此，他所说的圆、椭圆、双曲线和抛物线仅仅是其一部分。此外，他对纵坐标 y 如何依赖于横坐标 x 也注意得不够。但是，他的确领会到了通过被后来命名的“坐标系”，可以建立代数方程同几何曲线之间的有机联系。因此，他和笛卡

① 转引自M．克莱因：《古今数学思想》第2册，第2页。

尔一起分享创立解析几何的荣誉。

不仅如此，费尔马也有坐标变换的思想。比如，他明确地指出：一次方程表示直线，二次方程表示圆锥曲线。此外，费尔马在1643年的一封信里也提出空间解析几何的思想，并简短地描述了柱面、椭圆抛物面、双叶双曲面以及椭球面。他在另一篇短文中指出：含有三个未知数的方程表示一张空间曲面。

在近代，笛卡尔以哲学家的身份闻名于世；他也是一流的数学家、物理学家和生物学家。他在1628年出版的《指导哲理之原则》一书中已经提出"数、形同质"的思想以及用代数方法研究几何问题的思想。1637年，他用法文写了三篇论文《几何学》、《折光学》和《气象学》，并为三文写了长篇序言：《科学中正确地运用理性和追求真理的方法论》，一般简称为《方法论》，该书同年匿名出版。

笛卡尔分析了古代已有的几何学和当时已经定型的代数学的优缺点，并提出"寻求另外一种包含这两门科学的好处而没有它们的缺点的方法"①。《几何学》中所阐述的内容就是笛卡尔给自己所提出的上述任务所作的努力。该文的发表，标志数学的发展已进入一个新的阶段——变量数学阶段。

《几何学》共分三卷。第一卷是"关于只用圆和直线的作图可能问题"，内容主要是用代数方法解决几何问题，以及为了几何作图如何对线段进行+、-、×、$\sqrt{\ }$运算。例如，把一个作图问题归结为求线段x，而经过运算得出$x^2=ax+b^2$（a、b是已知线段的长度），于是$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$（笛卡尔不考虑负根）。笛卡尔指明了由a、b得出x的方法。

---

① 转引自《中国大百科全书·数学卷》，中国大百科全书出版社1988年版，第123页。

第三卷是“关于立体和三次方程以上问题的作图”，其内容与第一卷类似，只不过第一卷的几何作图只涉及一次、二次方程，而在第三卷中涉及的方程是三次及三次以上的，求已知量 a 和 q的比例中项就是一例。笛卡尔设 z 是一个比例中项，则另一个必定是z^2/a，再取$q = z^3/a^2$，于是z必须满足三次方程$z^3 = a^2q$。笛卡尔证明了Z和Z^2/a 可以借助一条抛物线和一个圆用几何作图法作出。这一卷还包括笛卡尔在代数学上的两项著名的成就：代数方程根的个数和“笛卡尔符号法则”。

《几何学》的第二卷是“曲线的性质”。如果说他在第一、三两卷中所作的工作只是用代数方法解决几何作图问题，用以表明代数方法的威力，那么他在第二卷中则进一步地发展了代数方法的威力——他通过坐标系把几何曲线变成代数方程，然后通过代数方程的研究来揭示曲线的性质。笛卡尔用这种新思想解决帕普斯问题时，在平面上以一条直线为基线，并为它规定一个起点，再选定与之相交的另一直线（不一定同基线垂直），它们分别相当于今之 x轴、原点和 y轴，于是帕普斯问题化成一个含两个未知数的二次不定方程：$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2$（A、B、C、D是已知量）笛卡尔说，“如果我们逐次地给出线段y以无限多个不同的值，对于线段x也可以找到无限个值。这样表示出来的点就可以有无限多个，因此可把所求的曲线表示出来”。笛卡尔还指出，方程的次数与坐标系的选择无关，因此可以根据方程的次数对曲线进行分类。

费尔马和笛卡尔共同之处是都没有负数概念，也没有 y轴，他们的“坐标系”都是斜坐标系，且都具有坐标变换的思想。据有人研究，两人的区别是：“笛卡尔常常首先考虑一条曲线，然后推导出它的代数方程；与此相反，费尔马常常首先考虑一个代数方程，然后由这个方程推导出相应曲线的几何性质。”① 其

① C.H.爱德华：《微积分发展史》，北京出版社1987年版，第130—131页。

实，借助几何曲线来研究代数方程和考察代数方程所定义的几何曲线是解析几何学相辅相成的两个方面。在写作年代上费尔马的《引论》早于笛卡尔《几何学》；而在发表的年代上笛卡尔又早于费尔马，这是一般称"笛卡尔解析几何"的主要原因。

费尔马和笛卡尔的解析几何思想并没有立刻得到数学家的普遍接受和使用。这主要有两个原因。第一，费尔马的《引论》出版较晚，而笛卡尔的《几何学》因强调几何作图问题，所以掩盖了用代数方程表示几何曲线并通过代数方程研究几何曲线这一珍贵思想。于是人们认为他的方法主要是作图的工具，甚至像莱布尼茨这样的数学家也认为，笛卡尔的工作是退回到古代。但是，笛卡尔却深信，他的贡献绝不仅仅是提供一个解决作图问题的新方法。他在《几何学》的引言中说："我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论，以及考查这些性质的方法，据我看，远远超出了普通几何的论述，正如西塞罗（Cicero）的词令远远超过儿童的简单语言一样。"①第二，早在16世纪，正当代数学蓬勃发展的时候，人们就反对把代数同几何、或者算术同几何相混淆。因为那时认为数的科学和几何量的科学是有区别的，是平行发展的。17世纪人们仍然持这种观点。牛顿在微积分中虽然也用到解析几何思想，但是他也反对把代数同几何相混淆。他说："方程是算术计算的表达式，它在几何里，除了表示真正几何量（线、面、立体、比例）间的相等关系以外，是没有地位的。近来把乘、除和同类的计算引入几何，是轻率的而且是违反这一科学的基本原则的……。因此这两门科学不容混淆，近代人们混淆了它们，就失去了简单性，而这个简单性正是几何的一切优点所在。"②哲学家霍布斯也反对把代数应用到几何中，并批评瓦里

---

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第18页。

② 同上书，第19页。

斯用到这一思想的著作《论圆锥曲线》(1655) 是“符号的结痂”。

2.解析几何的发展

笛卡尔的《几何学》中的有关思想其所以没有被当时多数数学家所理解,除上述两个原因外,还因为它本身并不完备,需要发展。此外,笛卡尔习惯把自己的书写得使人难懂也是原因之一。因此,首要的任务是宣传、解释笛卡尔的思想。范·斯柯登将《几何学》译成易于阅读的拉丁文,并为译文写了一篇介绍性的评论,译本于1649年出版,并再版了若干次。范·斯柯登这一工作对宣传、改进解析几何起了积极的作用。

其次,费尔马与笛卡尔的坐标系并不完备,也需要发展。瓦里斯在《论圆锥线》一书中有意识引进负的纵、横坐标,从而使解析几何中所考虑的曲线扩大到整个平面。但是,直到18世纪,人们沿用费尔马和笛卡尔的办法——只明显地划出x轴,y轴没有划出,或偶而划出。瑞士的克拉梅在他的《代数曲线的解析引论》(1750) 一书中正式使用了y轴。“纵坐标”一词莱布尼茨曾于1694年偶而使用,“横坐标”一词则出现了18世纪上半期沃尔夫等人的著作中。1691年,瑞士的J.伯努里(1654—1705)引入极坐标系。1729年德国的赫尔曼给出直角坐标系,并建立直角坐标系和极坐标系的互换公式。1748、1753年,欧拉引入sin、cos、tan等三角符号,并给出现代形式下的坐标变换公式,还引入了曲线的参数方程。

第三,在坐标系完善的过程中,人们首先对圆锥曲线作了整体、系统的研究。瓦里斯引入负坐标,并导出各种圆锥曲线的方程,发现它们都是二次的。于是他把圆锥曲线定义为“二次曲线”,从而使圆锥曲线从圆锥截线的地位中分离出来而成平面曲线的一种。其次,由于曲线方程概念的建立,使曲线概念日益扩大。比如:1638年笛卡尔发现对数螺线;1657年尼尔与霍拉特独

立地发现半立方抛物线；1658年帕斯卡提出摆线；1694年雅各·贝努里引入双纽线、悬链线和旋轮线；之后阿格内西引入舌线，卡西尼又引入以它的名字命名的“卡西尼卵形线”等。新曲线的陆续发现，丰富了建立不久的解析几何学。

第四，解析几何发展的重要一步是由平面到空间。费尔马和笛卡尔都曾认识到一个含有三个未知数的方程能表示平面、球面或其他曲面，但没有继续前进。1715年，约翰·贝努里首次引入空间直角坐标系。帕朗、克雷略和赫尔曼都曾经知道空间曲面可用含有三个变量的方程表示。克雷路在1731年又得出空间曲线可用两个空间曲面表示。

第五，欧拉的《无穷小分析引论》（1748）一书给出现代形式解析几何的系统叙述，是现代意义下的第一本解析几何教程。欧拉在该书中证明了任何一个含有两个变数的二次方程，通过坐标变换可以变成几个标准形式之中的某一个。欧拉通过研究认为，一般含有三个变量的二次方程其图形分成六种标准形式：锥面、柱面、椭球面、单叶和双叶双曲面、双曲抛物面和抛物柱面，已相当全面。继欧拉之后，蒙日和他的学生哈西特合著的《代数在几何中的应用》（1809）对欧拉的《引论》作了重要补充。蒙日等证明了二次曲面的平面截口为二次曲线；还证明了单叶双曲面和抛物面为直纹面。

第六，拉格朗日在他的《解析力学》（1788）中以近似后来的向量形式表示力、速度和加速度等具有方向的量。虽然拉格朗日没有对向量理论作出更大的推进，但是向量概念一经提出，就引起物理学家和数学家的注意。比如，受其启发和影响，英国的吉布斯和海维赛德创立了《向量代数》。正如吉布斯所预料，向量代数已成现代空间解析几何内容之一。

从解析几何的基本思想来说，实际是“坐标几何”或“代数几何”。“解析”又作“分析”。从古希腊起，作为证明方法的

“分析法”和“综合法”是恰好相反的思维过程。韦达认为 algebra（代数）在欧洲语中没有意义，建议用 analysis（解析）代替，并带头把自己的数学著作称《分析术引论》。但是除欧拉外，拥护者不多。达朗贝尔在著名的《百科全书》中，把“代数”和“解析”看成同义词，实际是承认现实的折衷办法。今天“解析几何”中的“解析”除主要指代数方法外，也有“分析法”的含义。今天的解析几何表示与传统几何不同的学科；今天的“代数几何”则另有含义。

3.解析几何的特点及意义

由费尔马和笛卡尔所开创的解析几何学同已有的几何学有显著的不同，它的产生对数学的发展具有深远的意义。

第一，解析几何把一切量如 a、a^2、a^3、$\sqrt[n]{a}$ 等以及它们之间的代数运算的结果都视为线段，这就克服了以往把 a、a^2、a^3 分别看成线段、面积和体积之量度的局限性。同时也冲破了所谓的“齐次原则”的禁区。按照这个原则，体积、面积和长度之间不能相加减，从而像方程 $ax^2+bx+c=0$ 就没有实际意义。解析几何把一切量都用线段之长短表示，使量的概念更加抽象。

第二，解析几何的创立，推翻了希腊时代把数学几何化的传统观念，反过来用方程表示曲线，在极大的程度上使几何代数化。在代数与几何这一矛盾中，其主要矛盾方面的转化，标志着数学的重大进步。代数方程和几何曲线通过坐标系建立有机联系，不仅开拓了新的数学领域，而且也促进代数学特别是促进几何学的重要发展。

第三，在解析几何中，方程 $F(x,y)=0$ 中的 x、y 已不再理解为未知的常量，而是理解为相互依赖的变数，即把 $F(x、y)$ 作为隐函数来理解，所以变数从此进入了数学。正是由于这个原因，人们才把解析几何学的产生作为变量数学的开端。解析几何的产生在数学发展的历史上标志常量数学时期的结束。随着变数

进入数学，人们对几何曲线的观念也发生了根本性的变化：几何曲线被看作动点的轨迹。例如，圆锥曲线在初等几何中被看成是圆锥和平面的交线，是已经完成的整体；而在解析几何中则被看成是动点按一定的几何条件移动的轨迹。从此，客观世界中运动变化的观念进入了数学，而静止和常数则被看成运动和变数的特殊情况。

第四，运动和变化进入数学，也为数学的发展增加了生命力。因为在过去，圆锥曲线主要作为数学的对象加以研究，实用意义并不大，现在则同一些客观过程相联系。比如在力学与天体力学中，圆锥曲线是有广泛的应用的。特别是解析几何的基本思想对数学的发展影响很大，试设想，如果在今天的微积分中去掉函数图形概念，只研究抽象的函数关系，那么一部简单的微积分将成为一部难于读懂的“天书”，不易被人们掌握。今天解析几何作为一种有效的工具，不仅渗透到各个数学领域，而且也广泛地应用于自然科学和工程技术领域。

19世纪以后，经典解析几何已经发展得相当完备，但这并不意味解析几何的活力已经结束。事实上，现代数学中的两个很有生命力的分支——泛函分析和代数几何，在很大程度上都是解析几何的直接延续。

4.射影几何的产生与发展简述

在解析几何学产生后的一个多世纪的时期内，代数法和分析法几乎排斥了综合法在几何学中的地位。有人形容，在18世纪只能听到“坐标磨坊的嘎嘎声”。但是这并不意味着综合法从此在几何学中销声匿迹。传统的综合几何不仅有严密的逻辑推理和优美的演绎形式，而且用综合法常在山穷水尽之时依靠使用者的智慧又可柳岸花明。综合法这些魅力吸引了一些数学家，17世纪的巴罗，18世纪的L·卡诺，19世纪的彭赛列和斯特纳都是坚持综合法的代表人物。卡诺希望“把几何学从分析学的画符样难懂的文

字中解放出来①”。彭赛列虽承认传统几何有缺陷，但他并不认为这是综合法所造成的，因此，他提出要创造与解析几何的威力相匹敌的综合几何学。在18世纪后半期，在分析学的困境还没有看到解决前景的情况下，综合几何学开始了复兴的历程。直到19世纪后半期，综合几何学产生了数以百计的新定理，如彭赛列等对九点圆的证明，斯特纳对等周定理的证明等，显示了这门古老几何学的无穷潜力。如果说这些成就因没有开拓新的数学领域而意义不大的话，那么综合射影几何学的建立则是一门比欧氏几何更为广泛的几何学。

射影几何学萌芽于古希腊，酝酿于文艺复兴时期，产生于19世纪初期，定型于19世纪末期。

古希腊的阿坡罗尼已经知道完全四角形的调和性质，他把二次曲线作为正圆锥的截线来讨论。基于绘制地图和建筑的需要，较早的希帕恰斯和较晚的托勒密都曾使用过射影法。4世纪的帕普斯在他的著作中不仅有对合、非调和比等概念，而且还有所谓的帕普斯定理（设A、B、C与A′、B′、C′分别是相异二直线上不重合的三点，则AB′与A′B，BC′与B′C，AC′与A′C三个交点在一线直线上。）

文艺复兴时期，由于建筑与绘画艺术得到充分的发展，同其密切相关的透视理论得到重视。许多思想家和艺术家（如达·芬奇等）在他们的著作中都有透视理论的叙述，当时也有一些专门的透视著作。法国的数学家、建筑师德扎格在他的著作《论透视截线》(1636）和《试图处理圆锥与平面相交情况初稿》(1639）中已有无穷元素、交比、调和比、极点和极线、透视等概念，证明了交比经过透视不变，还证明了今天所谓的德扎格定理（如果

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第3册，上海科学技术出版社1980年版第245页。

平面上两个三角形对应顶点的连线交于一点，则它们三组对应边的交点在一条直线上；反之也成立）。帕斯卡在他的《圆锥曲线论》（1640）一书中有著名的帕斯卡定理（同一条二次曲线上的任意内接六边形的三组对边的交点在一条直线上；反之也成立），这是帕普斯定理的推广；他还由这个定理推导出400条以上的推论，这是自阿波罗尼斯的圆锥曲线论以来最大的进步。德扎格定理和帕斯加定理并不涉及长度、面积、角度等度量性质，而是关于射影性质的射影定理。他们的工作在当时不仅没有受到应有的重视而且还受到一些批评，他们本人也没有意识到沿这个方向走下去将产生一门新的学科——射影几何学；但是他们的工作却为以后建立这门学科提供了一个基础。德扎格和帕斯卡无疑是射影几何的先驱。

从17世纪后半期开始，由于解析几何与微积分的产生吸引了人们的注意力，成为一个时期数学发展的主流。因此，由德扎格和帕斯卡所开创的新数学领域未有人坚持，中断了将近二百年，直到18与19世纪之交才在法国得到复兴。

18世纪的末期，法国的军事学校、炮兵学校、陆军学校以及一些工程性质的学校相继设立，科学普遍受到重视，特别是把数学作为这些学校教育的一部分，许多著名数学家受聘执教。数学课的内容主要是勒让德和拉克鲁瓦的微积分著作以及勒让德和蒙日的几何著作；两者都是当时数学的最新成就。

蒙日是法国大革命时期学术界的领导人，曾任法国海军与殖民部长，参与创办著名的巴黎综合工科学校（1795），并任该校领导人到1815年；曾跟随拿破仑远征埃及。由于建筑学、堡垒设计学、透视学、木石匠业等方面的需要，蒙日使画法几何成为独立的几何学。他的名著《画法几何》（1799）曾被列为军事秘密，所以30年后才公开出版。蒙日的学生杜班、塞尔瓦、布里安深、L.卡诺以及彭赛列等，都对复兴纯粹几何学有浓厚的兴

趣，且都有一定的贡献，比如布里安深与塞尔瓦曾给出今天以他们名字命名的定理。不过对射影几何的产生作出杰出贡献的是彭赛列。

彭赛列1810年毕业于综合工科学校；曾任一个工程学校的教官；1812年跟随拿破仑远征俄国，因战败被俘，在俘虏营度过近两年（1912—1914）时间。就在这两年中，彭赛列在没有任何资料的情况下，凭记忆和思考写出著作《论图形的射影性》(1822)。书中所使用的一些概念如交比、无穷远点等虽然曾有人论述，但是彭赛列是在深刻理解的基础上作了最系统的论述；他是第一个认识到射影几何是一个新的数学领域的人；他研究了二次曲线和曲面的配极理论，并由此导出一般的对偶原理。他还直观地讨论了一类图形在一定范围内连续变换时所保持的性质，并应用于虚元素。尽管他的讨论还不够严格，但是可以认为他这一著作的出版标志射影几何学的诞生。

继法国彭赛列的著作之后，德国有关著作大量出现，如：麦比乌斯的《重心计算》（1827），普吕克的五本数学著作（1828—1846），史特纳的《几何型的相互依赖性的系统的发展》(1832)，施陶特的《位置几何》（1847）等。这些著作从不同方面发展了刚刚诞生的射影几何学。

在19世纪上半期射影几何的发展中，综合法和解析法的争论异常激烈。以史特纳为代表坚持纯粹的综合法，反对使用解析法。按他的说法，几何能刺激思维，而计算则代替思维。他用纯粹综合法由简单图形推导出复杂图形，证明了等周定理（具有一定周长的平面图形中，圆周包围的面积最大）；由于反对解析法，所以不承认有正负的和虚的几何元素，并把它们说成是“几何中的鬼域”。普吕克则是解析派的代表人物。他首先创建一种齐次坐标系，并给出四条线交比的度量公式；接着他又引进了另一种齐次坐标系，并得到了平面上无穷直线的方程和无穷远圆点

的坐标等等。

应当说这场争论反映了当时几何学发展水平及其局限性；争论也促进几何学的更快发展。1882年，德国的帕施的《新几何讲义》一书综合已有成就建成第一个严格的射影几何演绎体系。如果说在19世纪以前，射影几何是欧氏几何的一部分，那么，经过19世纪的发展，欧氏几何反而成为射影几何的一部分了。

2.2 微积分思想的酝酿和产生

古典意义下的微积分是微分学和积分学的总称，是马克思主义经典著作中所说的“变量数学”或“高等数学”的主体部分。它作为一学科，产生于17世纪后半期，以牛顿和莱布尼茨的工作为标志，经过18世纪的讨论、研究，于19世纪才用极限法改造、定型成今天的形式。但是微积分中某些重要概念却萌芽于两千多年以前。

古希腊芝诺的“二分法”、“阿基里斯追龟”和我国《庄子》中“一尺之棰”等都是早期的极限思想。我国古代用“割圆术”求圆的面积，以及希腊用“穷竭法”计算曲边图形的面积和体积，都是极限思想在数学中的应用。今天的微分和积分思想虽然可以追溯到古代原子论学说，但是直到17世纪中期之前，二者却互不相干，各自独立而又平行地发展着。特别是从16世纪到17世纪中期的一个半世纪的时间里，几何学和自然科学的发展向人们提出了大量的问题，不同的数学家对这些问题采用不同的方法来解决，通过这些方法酝酿了积分和微分思想。

1.积分思想的酝酿

从16世纪后半期到17世纪前半期，积分思想是围绕“求积问题”发展的。它主要包括几何学和力学两个方面的问题。几何学方面是求平面曲线包围的面积、空间曲面包围的体积以及求曲线

的弧长；力学方面是计算非匀速运动物体经过的路程、物体的重心以及液体压力等。

（1）从"穷竭法"到"同维无穷小法"。

在"求积问题"的研究中，不少数学家和力学家一方面接受了希腊的穷竭法，另一方面又嫌这个方法过于累赘，力图简化、改进这一方法的某些步骤，比如取消反证法，特别是脱去该方法的几何外衣，引进数值计算等。荷兰力学家、数学家斯杰文是较早既接受穷竭法，同时又对穷竭法进行了某些修改的学者之一。

斯杰文是西方十进小数的创始人。他在解决求积问题计算中，偏重实际效率，比较忽视数学的严格性，比如常常略去穷竭法中两个近似图形中的一个。他在他的《静力学与流体静力学》（1586）一书中，为了求出水闸的压力，把水闸按水平线分成许多很窄的小长条。他用如下的方法证明三角形的重心应在它的中线上。

如图2.3，AD是△ABC的一条中线。在△ABC内作一系列等高的平行四边形，根据对称原理（该原理阿基米德证明杠杆原理时用过），内接平行四边形的重心应在其中线上。斯杰文让平行四边形的个数无限地增加（如成倍递增），这样内接图形同△ABC之差可以接近于零。他认为这就证明了三角形的重心在其中线上的结论。斯杰文用类似的方法曾经给出许多平面图形的重心。为了说明结论的正确性，穷竭法用了反证法，斯杰文又作了"补充说明"。补充说明很灵活，随问题而异，是有说服力的。他有时也用数学证明。斯杰文只取两个相似图形中的一个，在手续上也有所简化。

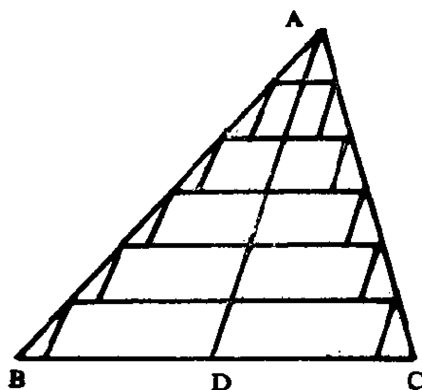


图 2.3

以斯杰文为代表的数学家虽然对穷竭法有某些改进，但本质仍限于几何框架。许多人继承了古希腊的原子论思想，并将其发展为具有特色的同维无穷小方法。德国天文学家开普勒是这方面的代表之一。1615年，开普勒出版了《测量酒桶体积的新科学》一书，该书分三部分，第一部分是阿基米德式的空间几何，其中计有92个旋转体的体积是阿基米德没有研究过的；第二部分重点研究酒桶体积的求法；第三部分是这一方法的应用。

在如何计算面积这一问题上，开普勒继承了库萨的尼古拉、斯蒂菲尔以及韦达等先驱们的思想：把圆看成由以微小的弧为底、以圆的半径为高且顶点在圆心的许多相同的微小三角形之和，并由此得出圆的面积为πr^2。开普勒用类似的方法算出圆环、球、苹果形、柠檬形以及圆锥等的体积。

以计算圆环的体积为例。图2.4所表示的圆环是由方程

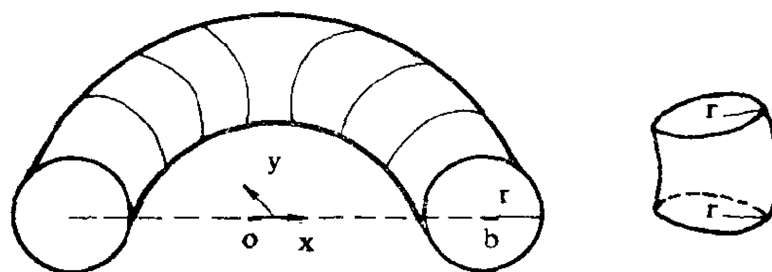


图 2.4

$(x-b)^2+y^2=r^2$ $(b>r>o)$ 所表示的圆绕y轴旋转而成，y轴称旋转轴。开普勒用为数众多的通过旋转轴的平面把圆环分成许多弯曲的圆柱体，每个弯圆柱体的上下底都是半径为r的圆。然后，开普勒用半径为r的直圆柱代替每个弯圆柱，直圆柱的高为相应弯圆柱上下底所夹的圆心为原点、半径为b的圆的弧长，因此，所有直圆柱的高应为$2\pi b$，于是求得圆环的体积为$2\pi^2r^2b$。

当旋转轴在旋转圆的内部时分三种情况：(a) 比半圆大的弓形绕旋转轴旋转得到的图形叫“苹果形”(图2.5中的实线)；

(b) 半圆绕旋转轴旋转得到的图形就是已知的球形；(c) 比半圆小的弓形绕旋转轴旋转得到的图形叫"柠檬形"(图2.5中的虚线)。

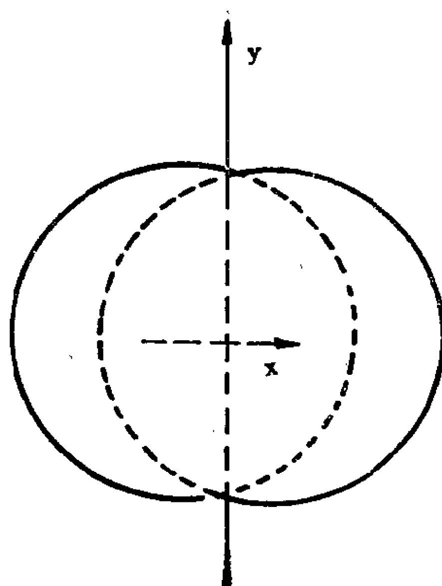


图 2.5

开普勒用以确定面积和体积的方法被称为"同维无穷小方法"。当然开普勒并未使用"无穷小"这个术语，在他的心目中是指"非常小部分"。他确信如果有必要，他所得出的结果是能够严格证明的，他说，"如果我们能够耐心地阅读阿基米德的这些艰深的著作，那么我们就会得到绝对的、各方面都完善的证明。"① 的确，开普勒所得出的结果是正确的，但是他所使用的方法不能认为是完备的。比如，当他把圆划分为微小的扇形时，无论弧线怎么小，扇形毕竟不是高为r 的三角形；当弧长缩为一点时，这时的"等腰三角形"无异于一个线段即圆的半径，因此圆面积是无数个半径之和。事实上，在一些问题中，开普勒承认面积是线段之和。用无数个同维无穷小之和计算面积和体积是开普勒的基本思想。

(2) 卡瓦列利的不可分元法。

意大利的卡瓦列利的积分思想同希腊的原子论一脉相承，称之为"不可分元法"。这一思想集中体现在他的两部著作：《用新的方法推进连续体的不可分量的几何学》(简称《新几何》，1635) 和《六个几何问题》(1647) 中。"不可分元"虽无严格的定义，但卡瓦列利曾给予明确的描述。他在《新几何》一书中指出，面积是由无数个平行线段构成的，体积是由无数个平行平

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，北京出版社1987年版，第139页。

面构成的。他在《六个几何问题》一书中进一步说："线是由点构成的，就像链条由珠子穿成的一样；面是由直线构成的，就像布由线织成的一样；立体是由平面构成的，就像书由每一页积累而成的一样。不过它们都是对无穷多个组成部分来说的。"① 可见，他把几何图形看成由比它低一维的几何元素构成的：线是点的总和，面是线的总和，立体是平面的总和。后者称为前者的不可分元。这种思想比开普勒的"无穷小"含义明确。卡瓦列利的"不可分元"尽管今天看来比较粗糙，但是含义是明确的，它们的"和"就是今天的积分概念。不可分元的个数虽然为无穷多，但是无穷在这里只是一个辅助性的概念，在作具体计算时并不出现。论证的每一步都把注意力集中在两个图形对应的不可分元上，然后再通过已知算出未知。

不可分元的代表性命题就是西方数学史中所谓的"卡瓦列利原理"（1623年确立）：设两个立体是等高的，如果与底面等高处的平行截面恒成定比，则这两个立体的体积之比也等于这个比。这同我国6世纪初期祖暅提出"幂势既同，则积不容异"的论断大体一致。

作为一个例题，在此简述一下卡瓦列利在《新几何》中关于椭圆面积V的求法。如图2.6所示，过椭圆短轴上一点引平行于长

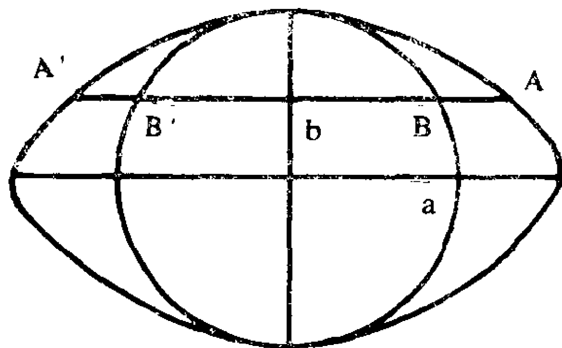


图 2.6

① 参见M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第57页。

轴的直线，分别交椭圆和圆于A′、A、B′、B，线段A′A、B′B分别称为椭圆和圆的不可分元。可以证明$\frac{A'A}{B'B}=\frac{a}{b}$，a、b分别是椭圆的长轴和短轴。于是得到由卡瓦列利不可分元思想，ΣA′A

$$\frac{\Sigma A'A}{\Sigma B'B}=\frac{a}{b}。$$

就是椭圆的面积V，ΣB′B就是半径为b的圆面积πb^2。因此

$$\frac{V}{\pi b^2}=\frac{a}{b} \qquad 即 \qquad V=\pi ab。$$

卡瓦列利在《新几何》中还证明了：$\Sigma x=\frac{1}{2}a^2$，$\Sigma x^2=\frac{1}{3}a^3$，直到 $\Sigma x^9=\frac{1}{10}a^{10}$。实际上相当今天的积分式

$$\int_0^a x^n dx=\frac{1}{n+1}a^{n+1} \qquad (n是不超过9的自然数)。$$

卡瓦列利的不可分元比原图低了一维，相对于原图来说无度量可言，所以是对原图的否定，在这个意义上说它是“零”。但是它又是原图的基本单元，它们的和构成原图，在这个意义上说它又是“非零”的。所以不可分元是以几何形式表示的无穷小量，蕴藏有辩证法思想。正因为如此，用此法能解决一系列求积问题。一般认为，卡瓦列利的不可分元法是牛顿和莱布尼茨以前积分思想的高峰。他的代表著作《新几何》曾风行一时，是当时数学家引用最多的书。

但是不可分元法本身仍然粗糙：它基本用语言叙述，用图形解释，而忽视数值计算；它试图回避无法回避的无限，因而产生一些模糊概念，比如图形的面积和体积是比其低一维的不可分元的总和，但是“总和”的含义是什么？所以有时出现悖论，例如，卡瓦列利于1644年曾发现如下的悖论：如图2.7，DH是△AGH

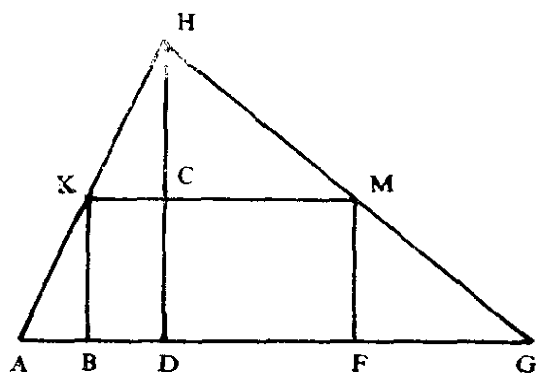


图 2.7

之高，且$3AD=DG$，$KM \parallel AG$，$KB \perp AG$，$MF \perp AG$，显然$KB=MF$。因KB和MF分别是△ADH和△GDH的不可分元，于是得出△ADH与△GDH面积相等的结论。另一方面，如果用KC和CM分别作为△ADH和△GDH的不可分元，因为

$$\frac{KC}{CM}=\frac{AD}{DG}=\frac{1}{3},$$

即$KC \neq CM$，于是又得出△ADH与△GDH的面积不相等的结论。因此，卡瓦列利总是对同一个问题尽量用不同的方法加以验证。卡瓦列利比较重视用这一方法得出的实际结果，而对这个方法的逻辑严格性不感兴趣，他明确地说："严密是哲学所关心的，而不是几何所关心的。"①

（3）不可分元法的算术化。

对卡瓦列利不可分元法首先作出修正的是托里拆利。托里拆利在他的《关于无限抛物线》（1646）一书中评论说："把不可分量看成是相等的，即把点与点在长度上、线与线在宽度上、面与面在厚度上看成相等的说法纯属空话，它既难于证明又毫无直观基础。"②他以圆和三角形的不可分元为例（图2.8），说明二

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第98页。

② 转引自中外数学史编写组：《外国数学简史》，第328页。

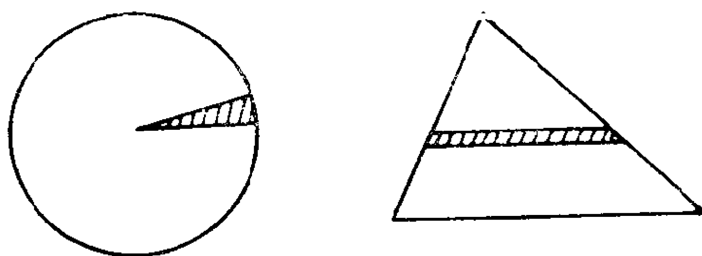


图 2.8

者的不可分元并不相同：一个是具有极小中心角的扇形，一个是具有微小宽度的带状体。所以他用开普勒的同维无穷小去代替卡瓦列利的不可分元。实际上托里拆利集中了开普勒与卡瓦列利方法的优点，因此，托里拆利的方法更接近今天的积分思想。

费尔马放弃了纯几何的不可分元素，使积分法算术化。他在计算曲线$y=x^n$在区间〔0，a〕上的面积时以等距离的纵坐标把面积分成许多窄长条，并依据不等式

$$1^n+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n$$

得到了相当于定积分$\int_0^a x^n dx=\frac{1}{n+1}a^{n+1}$的结果。

对于形如$y^p=x^q$（p、q均为正整数）的曲线，费尔马对曲线$y=x^{\frac{q}{p}}$在区间〔o，a〕上的面积不是用等距离的纵坐标划分为窄长条，而是按几何级数

$$a,\ \rho a,\ \rho^2 a,\ \rho^3 a,\ \cdots,$$

$(o<\rho<1)$划分区间〔o，a〕（图2.9），经过复杂的计算也得出相当于定积分

$$\int_0^a x^{\frac{q}{p}}dx=\frac{p}{p+q}a^{\frac{p+q}{p}}$$

的结果。费尔马还把这一结果推广到负指数的情况。费尔马的结

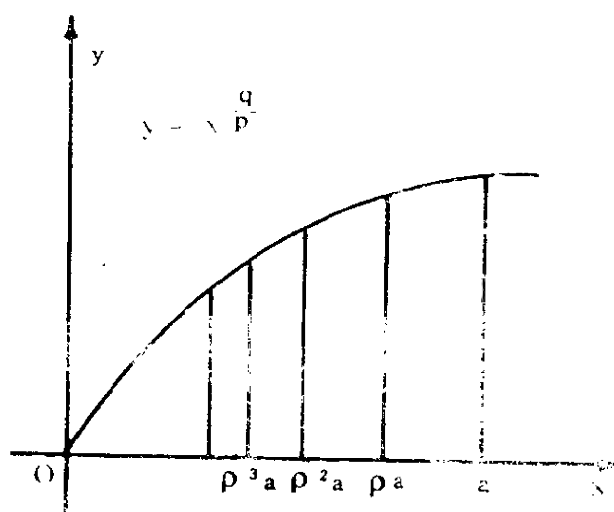


图 2.9

果已接近现代积分法。拉格朗日、拉普拉斯以及傅利叶等都曾称费尔马是"微积分的真正发明者"。但是普阿松则正确地指出，费尔马并没有真正认识到求积运算是求切线运算的逆运算这一要害问题。

帕斯卡的积分法同以他的名字命名的"帕斯卡三角形"有直接关系。他利用这个三角形，并引入无穷小概念，算出了以曲线 $y=x^n$ 为一边的曲边梯形的面积为：$\int_0^a x^n dx=\frac{1}{n+1}a^{n+1}$。例如，当 $n=2$ 时，他把区间〔0，a〕分为几等份，并令 $d=\frac{a}{n}$，于是得几个矩形面积之和为

$$d\cdot d^2+d\cdot(2d)^2+d\cdot(3d)^2+\cdots+d\cdot(nd)^2$$
$$=d^3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=a^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right).$$

到此为止，帕斯卡说，当n充分大时 $\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}$ 可以忽略，因而便得出

$$\int_0^a x^2dx=\frac{1}{3}a^3。$$

帕斯卡用“无穷小矩形”代替了卡瓦列利的“不可分元”，并依靠略去无穷小$\frac{1}{2n}$和$\frac{1}{6n^2}$得出正确的结果。他在回答别人的疑问时解释说，我们在这里所求的是面积为任意小的无穷多个矩形之和，而不是零之和。“无穷小矩形”就是函数值乘以自变量的增量，这种含义比之开普勒的“同维无穷小”和卡瓦列利的“不可分元”显得合理。帕斯卡的方法对后来莱布尼茨的积分思想影响很大，牛顿也曾用过这种方法。

我们已知，现代意义的“积分”被定义为“总和的极限”。尽管在卡瓦列利、费尔马和帕斯卡等人的求积方法中已经触及到这个关键的一步，但是他们的注意力是如何求出面积以及求面积的公式，而对面积公式的得出缺乏严格的算术化证明。在微积分的先驱们当中，英国的瓦里斯是算术化工作做得最多的一位，可以说，没有瓦里斯的算术化就没有牛顿的微积分。这一点牛顿也是承认的①。

瓦里斯接受了韦达、笛卡尔和费尔马等先辈们用代数方法研究几何问题的思想，第一次用算术方法证明了《几何原本》第5卷的25个定理，而且在合理性与严格性上并不比几何方法逊色。瓦里斯关于积分的主要著作是《无穷算术》(1655)。他在这部著作中把以往的几何求积中极限概念算术化，使有穷的算术变成无穷的算术。

比较典型的例子是求曲线$y=x^2$在区间〔0，a〕上的面积。与卡瓦列利和费尔马不同，瓦里斯并不直接求曲线下的面积，而是考虑所求面积同以区间〔0，a〕的长及端点的纵坐标

---

① 参看J.F.斯科特：《数学史》，商务印书馆1981年版，第197页。

a^n为边长的矩形面积之比（图2.10），即

$$\frac{\int_0^a x^n dx}{a \cdot a^n}。$$

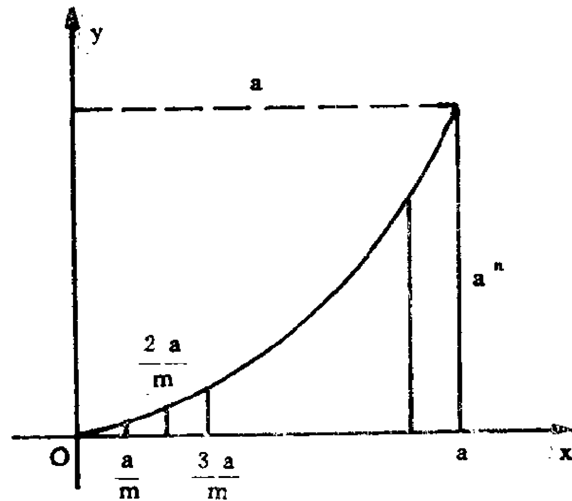


图 2.10

今将〔0，a〕分为m等份，由费尔马的方法可知所求面积的近似值为：

$$\left(\frac{a}{m}\right)^{n+1}[1^n+2^n+3^n+\cdots+m^n]=\left(\frac{a}{m}\right)^{n+1}\sum_{k=1}^{m}k^n。$$

它同矩形面积之比为：

$$\frac{\left(\frac{a}{m}\right)^{n+1}\sum\limits_{k=1}^{m}k^n}{a \cdot a^n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}k^n}{m^{n+1}},$$

当对区间〔0，a〕无限地分割下去，即让m无限增大时，瓦里斯算出了比值，并求出面积。把瓦里斯的计算用现在的符号表示就是

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{m}\right)^{n+1}\sum\limits_{k=1}^{m}k^n}{a \cdot a^n}=\frac{1}{n+1},$$

也就是

$$\int_0^a x^n dx = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a}{m}\right)^{n+1}\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}a^{n+1}。$$

瓦里斯不仅证明上式中的n对分数成立，而且推测对任意的正整数n也成立。

顺便指出，用符号∞表示无穷大，用它的倒数$\frac{1}{\infty}$表示无穷小或零量是瓦里斯第一次引用的。应当说，瓦里斯的极限思想是相当明确的。他说："变量的极限——这是变量所能逼近的一个常数，使得它们之间的差能够小于任何给定的量。"瓦里斯在尝试计算单位圆的面积时，遇到了积分$\int_0^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx$，计算虽未成功，但却意外地得到关于π的无穷乘积表达式

$$\frac{4}{\pi}=\frac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\cdots(2n-1)(2n-1)\cdot\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\cdots\cdot2n\cdot2n\cdot\cdots}。$$

这是数学史上π的第一个无穷乘积表达式，今天称"瓦里斯公式"。

求积法最初从修改穷竭法开始，中间经过许多人的工作，至17世纪中期瓦里斯引入极限思想，已经积累了极其丰富的材料，预示了积分学即将诞生。

2.微分思想的酝酿

在历史上，几何学中求曲线在其上一点之切线问题，力学中求质点运动的瞬时速度问题，以及求变量的极值问题，是产生微分学的基本问题。但是在牛顿以前，由于几何光学的迅速发展，特别是透镜的设计引起当时许多数学家的兴趣。他们意识到切线问题的重要性，所以求切线问题就成了微分学的先驱们研究的重点之一，对微分学的产生有直接的影响。马克思曾经指出："全部微分学本来产生了求任意一条曲线上任何一点的切线的问题。"①

---

① 马克思：《数学手稿》，人民出版社1975年版，第20页。

切线概念古希腊已有，不过那时的曲线仅限于圆锥曲线，因此把切线定义为同曲线有唯一交点的直线；对于非封闭的圆锥曲线则定义为和曲线只接触于一点而且位于曲线的一侧的直线。随着运动学和解析几何学的产生与发展，许多比较复杂的曲线被研究，上述切线的定义已不够用了。于是寻求对一般曲线也能适用的作切线的方法便提上日程。

（1）笛卡尔用"重根法"作切线。

笛卡尔在他的《几何学》（1637）中提出了一个求切线的方法，这个方法用现代的语言和符号叙述大致如下：

设曲线为$y=f(x)$，$p(x, f(x))$为其上一点（图2.11），为求曲线在p点的切线，笛卡尔把这一问题归结为求p点的法线同x轴的交点$c(v, o)$。以c为圆心，以$cp=r$为半径作圆。设此

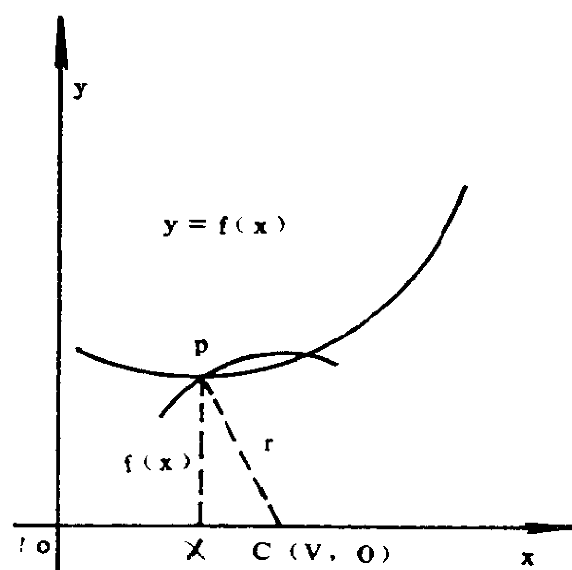


图 2.11

圆同曲线在p点附近还有一个交点。当cp是p点之法线时，则这两个交点重合，即p点应为曲线$y=f(x)$同圆$y^2+(x-v)^2=r^2$的"重交点"。即方程

$$[f(x)]^2+(v-x)^2-r^2=0$$

有一个二重根$x=e$。设$[f(x)]^2$是一个多项式，笛卡尔把上式具

有二重根的条件写成

$$[f(x)]^2+(v-x)^2-r^2=(x-e)^2\sum_i c_i x^i。\qquad (A)$$

比较上式两边的同次幂便可确定v，于是p点切线斜率便由$\frac{v-x}{f(x)}$确定。

例如，当$y=x^2$时，为求它在x点之切线斜率，先写出圆的方程式$[x^2]^2+(v-x)^2-r^2=0$。这时(A)的形式是

$$x^4+(v-x)^2-r^2=(x-e)^2(x^2+ax+b)。$$

式中a、b是待定系数。展开后得到

$$\begin{aligned}&x^4+x^2-2vx+(v^2-r^2)\\&=x^4+(a-2e)x^3+(b-2ae+e^2)x^2+(ae^2-2be)x+be^2\end{aligned}$$

令x的同次幂的系数相等，得到方程组

$$\begin{cases}a-2e=0\\b-2ae+e^2=1\\ae^2-2be=-2v\end{cases}$$

解这一方程组得到$v=2e^3+e$。代入$e=x$，得到曲线在x点的切线斜率是

$$\frac{v-x}{f(x)}=\frac{2x^3}{x^2}=2x。$$

我们称上述方法为“重根法”。笛卡尔对于这一方法很欣赏，并认为它可适用任何曲线。其实，当f(x)不是多项式时，使用它并不方便。尽管如此，这一方法蕴涵着把切线定义为割线的极限位置的思想，只是笛卡尔用纯代数的形式给出，没有涉及极限概念而已。

（2）费尔马借助微小增量作切线。

费尔马的《求最大值和最小值的方法》（1636年提出，1679年发表）提出了一个求切线的方法，这个方法的大意如下。

设PT是曲线在P点的切线（图2.12），TQ叫次切线，只要

知道其长，就可确定T点，再连接PT就是所求的切线。

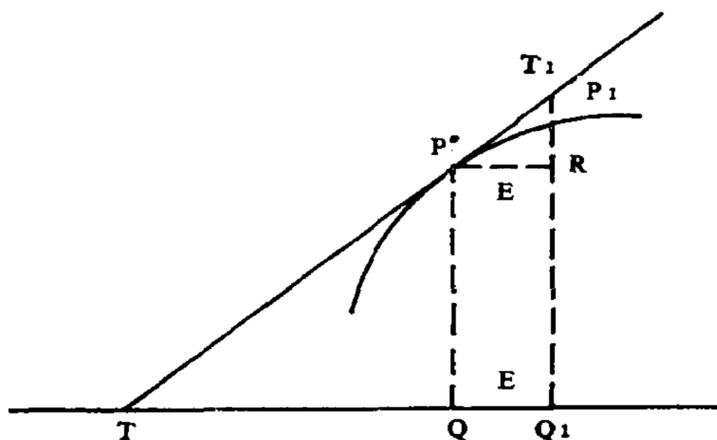


图 2.12

为了确定TQ之长度，设QQ_1为TQ的微小增量，其长为E（相当今天之△x）。因为△TQP～△PRT_1，所以$\frac{TQ}{QP}=\frac{PR}{RT_1}$

费尔马认为，当E(=PR)极其微小时，RP_1同RT_1几乎相等，因此可得

$$\frac{TQ}{QP}=\frac{E}{RP_1}=\frac{E}{Q_1P_1-QP}。$$

用现在的符号，把QP写成f(x)，则有

$$\frac{TQ}{f(x)}=\frac{E}{f(x+E)-f(x)},$$

即

$$TQ=\frac{E\cdot f(x)}{f(x+E)-f(x)}。$$

这时，费尔马用E同除等式右边的分子与分母，然后再让 E=0 就得出TQ的数值。

显然，费尔马的结果相当今天的 $TQ=\frac{f(x)}{f'(x)}$。虽然这个方法所蕴涵的极限思想还没有揭露出来，但是作为方法已具现代形

式。费尔马用此法曾解决了许多难题。

求变量的极大值和极小值是产生微分学的重要问题之一。费尔马在1636年给罗伯瓦尔的信以及1637年给麦尔先纳的信中，都曾谈到求函数的极值的方法，特别是后一封信叙述较为清楚。他的方法用现在符号叙述大致如下。

设$f(x)$是某个多项式，如果$f(x)$在x点达到极大值，则对充分小的E必有

$$f(x+E)<f(x) \quad 和 \quad f(x-E)<f(x)。$$

将此二式之左边展开则得：

$$f(x+E)=f(x)+p(x)E+Q(x)E^2+\cdots\cdots<f(x),$$
$$f(x-E)=f(x)-p(x)E+Q(x)E^2-\cdots\cdots<f(x)。$$

消去两个不等式的两边的相同项，再用E除之则得：

$$p(x)+Q(x)E+\cdots\cdots<0,$$
$$-p(x)+Q(x)E-\cdots\cdots<0。$$

当E充分小时，此二式左边的符号完全由$p(x)$确定。当$p(x)\neq 0$时，此二式不可能有同一的符号，因此必有$p(x)=0$。满足$p(x)=0$的x就是所求的极大值。

同理可以求出极小值。

如果E可正可负，则费尔马的思想就是：先求$f(x+E)-f(x)$，再除以E得$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}$；再让$E=0$得方程$\left[\frac{f(x+E)-f(x)}{E}\right]_{E=0}=0$；最后，解此方程得到极值点。很明显，费尔马的$E$就是今天之$\Delta x$，如果把$E=0$改为$E\to 0$，最后一步就是今天的解$f'(x)=0$得到极值点。

今天看来，费尔马的方法尚有不足之处。比如，没有极限过程，作为方法也没有严格的证明（这一点他自己也承认），且满足方程$f'(x)=0$的x只是极值点必要条件而不是充分条件等。

但是费尔马求极值的思想已接近今天的形式，特别是费尔马已经认识到求切线和求极值都需求$f'(x)$。因此，可以认为，在微分学的先驱们中，费尔马是比较成熟的一位。

（3）罗伯瓦尔等借助合成运动速度作切线。

罗伯瓦尔与托里拆利几乎同时从运动学的角度讨论曲线的切线。首先，他们接受了伽利略的思想——把曲线看成是动点M在两个已知的独立运动速度作用下的轨迹，动点M的速度由力学中的“平行四边形法则”决定；其次，他们把曲线在M点的切线定义为由平行四边形法则所确定的对角线。罗伯瓦尔在他的《不可分法论》（写于1634，1693年出版）等著作中，用这种思想顺利地求出了已知焦点的圆锥曲线、蚌线、阿基米德螺线、摆线以及其它一些曲线的切线。

托里拆利运用上述方法独立地求出曲线$x=y^n$的切线。比如，他求抛物线切线的方法用今天解析几何的语言叙述大体是这样：设0点是动点M的初始位置（图2.13），质点M以重力加速度g自由下落，它本身又以匀速u作水平移动，于是在瞬间t就有

$$x=\frac{1}{2}gt^2 \quad 和 \quad y=ut,$$

消去t后得

$$y^2=\frac{2u^2}{g}x。$$

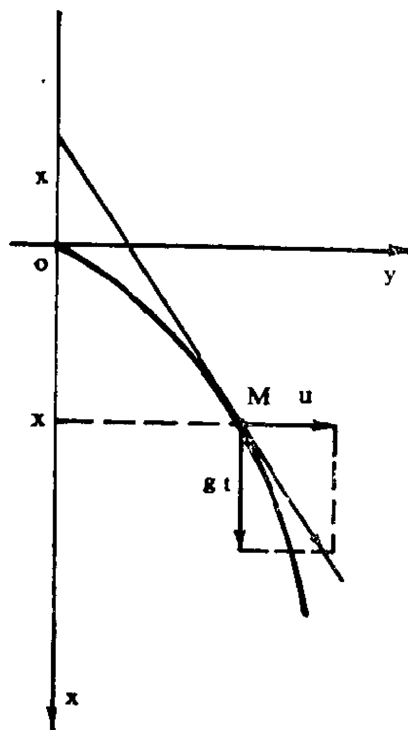


图 2.13

可见动点M的轨迹是抛物线。由垂直速度和水平速度之比为

$$\frac{gt}{u}=\frac{gt^2}{ut}=\frac{2x}{y},$$

再应用相似三角形的性质，可以得出M点的切线同抛物线轴相交于距离顶点O的距离为x处。

罗伯瓦尔和托里拆利的方法虽比希腊方法普遍，但由于借助运动学中的合力作切线，所以力学意义过强，对于计算同力学无关的曲线的切线，就不如笛卡尔和费尔马的方法方便。

（4）巴罗等利用“特征三角形”作切线。

“特征三角形”就是现在的“微分三角形”。它最早出现于斯奈尔1624年的一部并非数学的著作中，以后在托里拆利、罗伯瓦尔、巴罗以及帕斯卡等人的数学著作中都有所见。帕斯卡在他的《四分之一圆的正弦论》（1659）一书中还明确提出当区间很小时，则“弧可以代替切线”。用这种方法作切线，不仅当时十分流行，而且影响到18世纪末期。比如，法国的波绪在他的《微积分》（1798）一书中就用此法。恩格斯认为，在一定条件下，把曲线看成直线是微积分的重要思想之一。①

下面介绍巴罗在他的《几何学讲义》（1670）的第十讲中用“特征三角形”作切线的方法。

巴罗本人的数学观基本上与希腊人相同。他认为只有几何学才是数学，代数不应当作为数学，而应当包括到逻辑中去，他认为数学应“从讨厌的计算重担中解放出来”②。尽管如此，他对即将分娩的微积分也有深刻的理解，比如他的求切线的方法，以及对求切线和求积的互逆性的认识对牛顿微积分的产生起了直接的作用。

设曲线由隐函数式$f(x, y)=0$表示，$\overset{\frown}{MN}$为其上“任意小的弧”（图2.14）。首先，巴罗写出这两点的坐标$M(x,y)$，$N(x+e, y+a)$，于是

---

① 参见恩格斯：《反杜林论》，第117页。

② 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第53页。

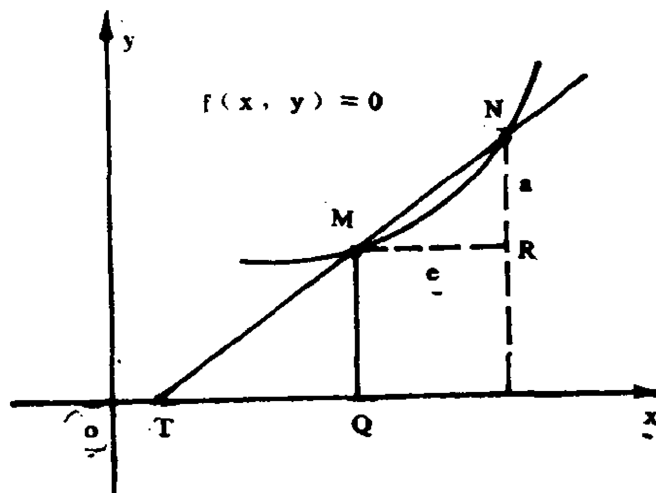


图 2.14

$$f(x+e,\ y+a)=f(x,\ y)=0;$$

然后，他舍弃“一切包含a和e的幂或二者之积的项（因为这些项没有什么价值）”；最后，他把“任意小的弧”$\widehat{MN}$等同于直线段$\overline{MN}$，由于△TQM与“特征三角形”MRN相似，从而得出切线的斜率$\frac{y}{t}=\frac{a}{e}$。例如，对笛卡尔叶形线

$$f(x,\ y)=x^3+y^3-3xy=0,$$

可以得出

$$(x+e)^3+(y+a)^3-3(x+e)(y+a)=x^3+y^3-3xy,$$

$$3x^2e+3xe^2+e^3+3y^2a+3ya^2+a^3-3xa-3ye-3ae=0,$$

舍弃a和e的所有高次项后得：

$$x^2e+y^2a-xa-ye=0,$$

再从中解出切线的斜率

$$\frac{a}{e}=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

巴罗的e和a分别相当于今天的△x与△y；他的方法相当于让a和e趋向于零时求出比值$\frac{a}{e}$的极限值，实际上也是把切线定义

为割线的极限位置。巴罗已经认识到这一方法的优越性，正如他在第十讲的结尾所说，这种求切线的方法是“由于接受了一位朋友（指牛顿）的劝告，并且我也很愿意，因为这种方法比我们已经讨论过的方法更有利、更一般”①。

微积分经过大约一个半世纪的酝酿，以费尔马和巴罗的工作为标志而结束。在微积分的先驱者中，他们的兴趣都集中在某些具体问题的研究。但这并不等于基本原理的建立和严格的逻辑论证。通过上面简单的介绍可以看出，这时的微积分失去了古典数学应有的严格性；它的产生虽然已经到了水到渠成的程度，但毕竟还需要再创造。撇开某些细节不谈，至少有如下四个问题尚待解决。

第一，**精确概念**。如无穷小、无穷大、变化率等，特别是无穷小概念必须进一步精确化。

第二，**提炼方法**。就是把解决各类具体问题的方法概括成具有普遍意义的数学方法。

第三，**改变形式**。就是把概念和方法的几何形式改变成解析形式。

第四，**建立联系**。就是建立“切线法”与“求积法”之间的联系。这一联系的建立意味着微积分的诞生。

基本上完成（不是全部合理解决）这一变革的是牛顿和莱布尼茨。

3.牛顿的微积分思想*

牛顿的微积分思想，前后并不一致，他的三部著作：《运用无穷多项方程的分析学》（简称《分析学》）、《流数法和无穷

---

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，第178页。

* 以下内容以《牛顿和莱布尼茨的微积分思想》为题曾刊载于《中国人民大学学报》1988年第1期。

级数》（简称《流数法》）和《曲线求积术》（简称《求积术》）分别代表了他的微积分思想发展的三个阶段。

（1）《分析学》中的思想。

《分析学》中的思想在1665—1666年已有，1669年写成，1711年出版。在这部著作中，牛顿继承了费尔马、瓦里斯和巴罗等先驱者的"无穷小"概念，不过牛顿不叫无穷小而叫"瞬"（moment），并用J.格里高利的符号"o"表示。由于牛顿应用了他的二项式定理，不仅极大地简化了计算手续，而且还能用于更广泛的一类函数，这是一次重要的进展。

在《分析学》的开头，牛顿明确提出：设曲线为$y=ax^{\frac{m}{n}}$，则其下的面积为

$$Z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}。$$

牛顿证明这一命题的方法大致是这样：

当横坐标为x时，对应的面积为

$$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}},$$

当横坐标变为$x+o$时，则对应的面积为

$$\frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}。$$

将此式用二项式定理展开，并从展开式中减去

$$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}},$$

得到牛顿所谓的"瞬"（即面积为无穷小的曲边梯形）；再将所得的结果除以o；然后舍去含有o因子的各项就得出原曲线$y=ax^{\frac{m}{n}}$。到此牛顿说，"反过来，如果曲线为$y=ax^{\frac{m}{n}}$，则（其下的）面积为

$$Z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}\text{。”}①$$

尽管“反过来”这一步仅限于给定的曲线，但毕竟正确地指出了曲线$y=ax^{\frac{m}{n}}$与其下之面积

$$Z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$$

之间的互逆关系，相当于今天的公式

$$\frac{d}{dx}\int^{x}f(x)dx=f(x)。$$

正是这一步揭示了微分同积分之间的互逆关系，标志了微积分的诞生。

在牛顿的计算过程中，关键一步是让x变为x+o。这里的“o”到底是甚么？牛顿没有给出任何解释。从他的论证过程来看，他先把“o”看成是非零之常数（尽管它很小），否则说“横坐标变为x+o”以及用“o”作除数就毫无意义。但是当他最后舍弃含有o因子的各项时，他实际是把o视为零的，否则舍弃后不会得出绝对正确的结果。在这里牛顿遇到了严重的逻辑困难。

可见，《分析学》的主要成就在于指出曲线与其下的面积的互逆性，并给出计算的方法，而不是明确o的概念，也不是严格的逻辑论证。牛顿也认识到他仅仅是作了“简略的说明，而不是正确的论证”②。牛顿的态度是严肃的。人们称《分析学》的思想是原子论的思想或实无穷小的思想。

（2）《流数法》的思想。

《流数法》写于1671年，1736年即牛顿去世后的第9年出

---

① 参见J.F.斯科特：《数学史》，第199—200页。

② C.B.波耶：《微积分概念史》，上海人民出版社1977年版，第204页。

版。这是牛顿微积分的代表作。在这部著作中，牛顿把时间看成是最基本的自变量，它均匀而稳恒地流逝着，是衡量一切变化的标准尺度。在他看来，速度是一个自明的概念，既清楚而又直观，没有任何给予定义或解释的必要。因此他的《流数法》明显地带有从力学与物理学脱胎而来的痕迹。比如：他把以时间为独立变数的一切函数称为“流量”（fluent），流量的速度（即变化率）称为“流数”（fluxion）。对流量他用字母 x、y、z表示，相应的流数他用符号$\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$表示；如果流数为x、y、z，则相应的流量他用符号$\overset{|}{x}$、$\overset{|}{y}$、$\overset{|}{z}$表示。流量与流数都可以定义高阶的，如符号：

$$\cdots\cdots\overset{||}{x}\quad \overset{|}{x}\quad x\quad \dot{x}\quad \ddot{x}\cdots\cdots$$

前一个是后一个的流量，后一个是前一个的流数。由流量求流数相当于今天求函数的导数，反之，相当于今天求函数的不定积分。

在《流数法》中，牛顿明确地说：“流数法赖以建立的主要原理，乃是取自理论力学中的一个非常简单的原理，这就是：数学量，特别是外延量，都可以看成是由连续运动的轨迹产生的；而且不管甚么量，都可以认为是在同样方式之下产生的，至少经过类比与调整之后可以如此。……这里，本人是靠另一个同样清楚的原理来解决这个问题的；这就是假定一个量可以无限分割，或者可以（至少在理论上说）使之连续减小，直至它终于完全消失，达到可以把它们称之为零量的程度，或者它们是无限的小，比任何一个指定的量都小。”①

在这段话中，如下两个思想值得注意。因为这反映了牛顿思想的转变与进步。

第一，他认为数学量（即通常的x、y等）和它的外延量（即

---

① J.F.斯科特：《数学史》，第200页。

今之Δx、Δy）等都是由连续运动生成的，表明了牛顿已由《分析学》中原子论的思想转变为连续运动思想。

第二，他认为数学量"可以无限分割"，"使之连续减小"，以至达到"完全消失"，能够"称之为零量的程度"，能够"比任何指定的量都小"。这表明他已从《分析学》的实无穷小思想转变为潜无穷小思想。

因此，人们称《流数法》的思想是用动力学解释趋于零的变量的思想。

虽然《流数法》中的思想已有相当大的发展，但在具体计算时，实际同《分析学》中的方法一样，所以同样遇到严重的逻辑困难。对此，牛顿解释说："……与它（按：指o）相乘的诸项相对于其它诸项来说等于没有，因此我把它们丢掉。"①但是牛顿对这样的解释并不满意。由于在《分析学》与《流数法》的计算中，"o"成了"招之即来，挥之即去"的神秘物，所以马克思在《数学手稿》中称这样建立起来的微分学为"神秘的微分学"。

牛顿认识到逻辑困难完全由无穷小"o"引起的，为了克服这一困难，他又写了《求积术》一书。

（3）《求积术》中的思想。

《求积术》写于1676年，1704年出版。在这一著作以及他的代表作《自然哲学的数学原理》（1687）中，牛顿完全回避了无穷小概念，引入"最初比"和"最后比"概念，试图建立没有无穷小的微积分。

什么是"最初比"和"最后比"？牛顿在这两部著作中反复地作过解释，他说："消失量的最后比严格地说并不是最后量之比，而是这些量无限减小时它们之比所趋近的极限，并且虽然它

① J.F.斯科特：《数学史》，第202页。

们能比任何给定的无论甚么差值都接近于它，但是这些量无限减小之前，既不能超过也不能到达它。”① 这是牛顿关于“最后比”的最清楚的解释。

在没有建立起极限理论之前，这样的解释并不容易被人理解，所以牛顿又结合实例进行说明。从他的说明可以看出，“最初比”和“最后比”的原型分别是力学中的“初速度”和“末速度”；对于同一个时刻来说，初速度和末速度是相同的。

牛顿用这一思想算出了一些函数(如x^n等)的流数，也给出了某些函数的流数的几何模型（相当于作曲线上一点之切线）。牛顿认为：“照这样用有限量来制定一种分析学，并研究这些有限量在新生的或渐近于零的情况下的最初比与最后比，是与古代的几何学一致的……”②。

我们从牛顿对最初比和最后比所作的解释、所举的实例以及对批评他的人的回答来看，牛顿已从原来的原子论思想，经过用动力学解释趋近于零的量的过渡，现在已明显地转变为极限的思想。当然他的极限思想仅限于单调变量与单侧极限的范围。

一代哲学大师黑格尔非常赞赏牛顿的正在消失的两个量之比值的思想，他说：“对这种思想的正确规定，莫过于牛顿。”③ 黑格尔用他的辩证法解释了牛顿的最后比，他说，这种思想“更精确地说，就是定量在那里消失了，从而比率只是作为质的量比率而被保留，其各项也同样只是作为质的量环节而被保留”④。用现在的符号解释就是，作为“定量”的dx、dy消失了，但其比值$\frac{dy}{dx}$则作为质的量而被保留。这一思想相当于今天当增量

---

① C.B.波耶：《微积分概念史》，第210页。

② J.F.斯科特：《数学史》，第206页。

③④ 黑格尔：《逻辑学》上册，商务印书馆1966年版，第276、278页。

$\Delta x \to 0$时，比值$\Delta y/\Delta x$的极限为$f'(x)$。

4.莱布尼茨的微积分思想

莱布尼茨的微积分思想前后也不一致。他的微积分代表著作有二，一为他的《数学笔记》，一为1684年的论文：《新方法》。此外还有他同当时数学家的大量通信和文章等（据统计，他留下了15000多封信件，与他通信的科学家有一千位以上）。由于材料比较零散，甚至难以理解，所以他的微积分思想的发展远不如牛顿思想发展的层次清楚，但却极有启发性。下面先分析他的主要著作中的思想，然后对他的思想的发展作一综述。

（1）《数学笔记》中的思想。

《笔记》是莱布尼茨从1673年起研究了格里高利、费尔马、帕斯卡、笛卡尔和巴罗等人的著作后写的，共约100页，很不系统，且没有公开发表，但其中却有他的微积分思想、符号和计算方法。

在积分符号方面，他于1673年的笔记中接受了卡瓦列利的符号，即用拉丁文omnia（和）的头三个字母omn表示积分号。1676年他又改用summa的头一个字母s的变体即今之$\int$。在微分符号方面，他开始用 l 表示今之dy，并经常用a表示今之dx；以后他分别改为y/d和x/d，最后才改成现在的形式dy和dx。

在1675年的笔记中，莱布尼茨明确地说“$\int$意味着和，d意味着差。”他用和与差的关系说明$\int$与d的互逆关系。尽管有人研究后认为这句话可能是他后来加进去的，但毕竟是他自己的思想。这样，莱布尼茨明确地指出了积分过程和微分过程是互逆过程。这个论断正确、深刻，是莱布尼茨具有微积分思想的标志。可惜在他的《笔记》中是从一个粗糙的和式，即从一组矩形面积之和中得到曲线下的面积的，所以这个论断同牛顿一样缺乏严格

的论证。

在具体计算方面，莱布尼茨在1676年的笔记中，为了求出曲线下的面积而计算矩形面积之和，略去了无穷小三角形面积之和。其所以略去，他的解释是："因为它们同矩形相比为无穷小，……因此在我的微积分中，我用$\int ydx$表示面积"①（式中ydx表示矩形面积，$\int$表示和）。莱布尼茨这一思想同当时流行的不可分元的思想——把面积看成是直线之和一脉相承。在英国《皇家学会会报》中就有"从1687年以来，莱布尼茨先生就一直使用符号$\int x$、$\int y$、$\int z$来表示纵坐标之和"②的记载。可见，莱布尼茨的积分是以"求和计算"的形式出现的。

在计算曲线上一点的切线方面，从他1676年致牛顿的信中可知，他接受了帕斯卡等先驱者的"特征三角形"，认为当dx、dy极小时，曲线上相邻两点之间的曲线同时也是切线即直线的一部分，而dx与dy分别是相邻两点的横坐标之差和纵坐标之差，他把这种用dx和dy求切线的方法称为"纵坐标差分法"，所以后世数学家称他的微分学为"求差计算"。

（2）《新方法》中的思想。

1684年，莱布尼茨在莱比锡的《教师学报》上发表题为《关于求极大、极小和切线的新方法，也能用于分数和无理数的情形及非寻常类型的有关计算》（即《新方法》）一文。这是他公开发表的第一篇关于微积分的论文，也是他的微积分的代表作。全文只有6页，由于过于简略，再加上印刷方面的错误，所以含混不清，就连他的支持者贝努里两兄弟也说："与其说是解释，不

① M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第90页。

② J.F.斯科特：《数学史》，第216页。

如说是谜。”① 文章仍用舍弃无穷小的方法给出函数的和、差、商的微分法则（这些法则在他的《笔记》中已有）。当n 为正整数时他得出 $d(x^n)=nx^{n-1}dx$，这时他未加证明就大胆宣布：当n 为任意实数时此式仍然成立。文章还给出计算切线、极值与拐点的例子。

1686年，莱布尼茨又在同一刊物上发表题为《论一种深邃的几何学和不可分元分析以及无穷》一文，这是《新方法》的续篇。该文除了给出指数函数、对数函数以及形如 x^x 的函数的微分法则以外，还有对曲率、密切圆和包络的讨论。他还用积分符号给出摆线方程，并以此说明用积分符号能表示一切曲线，而用其他方法则办不到。莱布尼茨在文章中提醒人们，不能在积分符号$\int$下忽略了乘以dx，再一次说明他的积分是求无穷小量（即微小矩形）之和，这一点同牛顿以原函数概念为出发点的积分思想不同。

（3）莱布尼茨微积分思想的发展。

由于莱布尼茨的“求和计算”和“求差计算”同牛顿前期一样均以实无穷小作基础，所以遇到同牛顿一样的逻辑困难，也招来不少的批评。为此，他同当时许多数学家通信解释自己的思想，并写了几十篇文章回答对他的批评。

对他的信件和文章研究表明，起初，莱布尼茨试图将实无穷小代之以与其成比例的有限量，即不用dx、dy本身，而用它们的比值$\frac{dy}{dx}$。他以为把dx、dy看成有限量就可以了，但是比值$\frac{dy}{dx}$之来源又离不开无穷小dy与dx之比，所以此路不通。

---

① M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第91页。

回避作为实无穷小的dx、dy既然不可能，他又提出用“充分小”和“充分大”的数量去代替无穷小与无穷大。他说：“我们也可以不用无穷大、无穷小，而用充分大和充分小的量，使得误差小于给定的误差限度，所以我们和阿基米德方式不同之处仅仅在于表达方面，而我们的表达更为直接，更适合于发明家的艺术。”① 他把实无穷小用“充分小”代替，并说“使得误差小于给定误差的限度”。可以看出，他已模模糊糊地认识到潜无穷的必要性，这已同牛顿后来的思想相一致，但不如牛顿明朗。

同牛顿一样，在没有建立起现代极限理论以前，他只能就此止步。于是莱布尼茨不得不诉诸于人们的直观，即用无穷的物理与几何模型进行解释。他认为点同直线不能相比，所以把一点加到直线上或从直线上去掉一点等于不加也不减。他曾用现实世界中量的不同层次解释无穷大与无穷小，他说：“当我们谈到有不同阶的无穷大与无穷小的时候，就像对恒星（距离）而言，把太阳看成一个点，对地球半径而言，把普通的球看成一个点，这样，恒星的距离对普通球的半径而言是无穷的无穷大，或无穷倍的无穷大……”②。在有的地方，他又把普通球换成砂粒，用以说明砂粒、地球、恒星距离之间的无穷关系。但是这种解释的方式并不是他首创的，在他之前的罗伯瓦尔和帕斯卡等人的工作中都用类似的办法论证他们的求积术。莱布尼茨在这个问题上并没有前进一步，且这种解释在理论上并不足以服人。

莱布尼茨不得不另寻出路。于是他又提出，最好的出路是把作为实无穷小的dx、dy看作是“虚构的”、“理想的”概念，是“有根据的假设”。他说：“老实说，我不十分相信，除了把无穷大

---

① 转引自《关于微积分的历史》，载《北京师范大学学报》（自然科学版）1978年第1期，第78页。

② 同上，第77页。

和无穷小看作理想的东西，看作确有根据的假设而外，还有什么必要去考虑他们……”，他又说，“我不相信确有无穷大量和无穷小量存在，它们只是虚构的，但是对于缩短论证和在一般叙述中是有用的虚构。”①

值得注意的是，上述最后一段话出自《微分学的历史和起源》（1714）一文，该文是他在生命的最后两年写的。可见，他把自己的微积分只是作为求得正确结果的一种方法，也就是按这个方法去作，就能得出正确的结果，而不必去管它的基本概念如何。不仅如此，他认为这样作同古典方法并不相悖，而且比古典方法更优越，“更适合于发明家的艺术”。这一点同牛顿在《分析学》中所作的工作一样：只是建立方法，而不是澄清概念。正因为如此，所以马克思在《数学手稿》中把牛顿和莱布尼茨的微分学统称为“神秘的微分学”。

在莱布尼茨看来，数学中的无穷大、无穷小以及虚数、多维空间等概念都是“虚构的”，其所以虚构它们，是由于“对缩短论证和一般叙述”是“有用的”，是缩短论证的“理想的东西”。这是他把微积分看成是纯粹思维产物的结果，是他的唯心主义思想在数学上的反映。

进一步的问题是，把无穷大和无穷小这些“虚构”的概念引入数学后，它们服从什么样的运算规律？这些规律又如何而来？运用这些规律为什么能得出正确的结果？

对此，莱布尼茨设想建立一个包括无穷大和无穷小的运算系统，其中有穷量与无穷量服从相同的规律。他说：“用于有穷的法则也适用于无穷，……反过来，用于无穷的法则也适用于有穷……”。他这样设想的“根据”有两个：“最高原理”和“连续性原理”。

① 转引自《关于微积分的历史》，载《北京师范大学学报》（自然科学版）1978年第1期，第78页。

“最高原理”是莱布尼茨唯心主义哲学体系中的一个范畴，是指事物发展链条的最后一环，这一环又叫“充足理由”或“最后理由”。他明确说过：“一切服从理智，否则就不会有科学，就不会有法则，这是不符合最高原理的性质的。”① 他还说：“有一些原始的原则，是不能够证明的，也不需要证明。”②他的话说穿了就是，只要是科学，你就不能打破砂锅问到底。显然，他的最高原理不过是上帝的哲学名称而已。事实上，莱布尼茨也不否认，他说：“事物的最后理由应当存在一个必然的实体里面，……这个实体就是我们所谓的上帝。”③

“连续性原理”是莱布尼茨的哲学体系中又一范畴，它在这个体系中的地位相当于公理在数学中的地位，只不过连续性原理不是现实关系的抽象，而是先验的假定罢了。莱布尼茨认为，“事物完善的程度以不显著的过渡形式上升”，因此世界到处都是“事物的无限细微性”占支配地位，所以他明确提出“自然界从来不会飞跃”的思想。他的连续性原理就是这一思想的别名。他说：“在任何假定的向任何终点的过渡中，允许制定一个普遍的推论，使最后的终点也可以包括进去。”④ 莱布尼茨就是凭借这一原理的帮助，从有限量的关系出发得出无穷小量之间的关系。他说：“在这些假定下，我们在1684年10月的《教师学报》中所列举的算法的全部规则，都能够不很麻烦地给以证明。”⑤意即有了这个原理，前面所述《新方法》中的所有微分公式都是不难证明的。

人们从莱布尼茨应用他的连续性原理推导微分公式的运算中不难发现，他已不自觉地用到了极限概念。在他的后期关于无穷

---

① 转引自《北京师范大学学报》（自然科学版）1978年第1期，第80页。

②③ 《16—18世纪西欧各国哲学》，商务印书馆1961年版，第298页。

④⑤ M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第101、102页。

的理解也用到了极限概念：他把无穷大看成“无限制的大”或“要多大就多大”，无穷小就是“要多小就多小”。他在一封信中说：“我们并不把无穷小设想为单纯的绝对的零而是作为相对的零，这就是说，把它作为保留着正在消逝的量的特征的一个消逝的量。”① 莱布尼茨这一思想表明，他的后期同牛顿一样向极限思想逐渐退却，但仍不如牛顿明朗。

5.牛顿和莱布尼茨微积分思想的比较

（1）关于优先权问题。

微积分的产生是数学发展史上的重大事件，从此数学真正进入变量数学时期。恩格斯在评价这一历史性成就时说：“在一切理论的成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。”② 正因为其意义重大，所以在牛顿和莱布尼茨的故乡英国和欧洲大陆之间发生了一场创立微积分优先权问题的争论。双方都有一批积极的支持者。争论长达一个多世纪之久，争论使两个地区的学者互不往来。经数学史家严肃的考证和认真的研究，今天一致认为牛顿和莱布尼茨二人基本同时、各自独立创立了微积分。从下表可以看出，在写作时间上，

	写作年代	发表年代
牛　　顿	1669,1671,1676	1704,1711,1736
莱布尼茨	1673—1676	1684，1686

牛顿略先于莱布尼茨，而在发表时间上，莱布尼茨又稍先于牛顿。他们二人应分享创立微积分的光荣。

（2）两人思想的相同点。

① C.B.波耶：《微积分概念史》，第232页。

② 恩格斯：《自然辩证法》，第244页。

两人既然都是微积分的创立者，当然有不少共同之处。

第一，经过二人的工作，微积分已不再像古希腊时那样，所有数学都是几何学的一个分支；也不像他们的先驱们那样，使微积分束缚在几何框架之中，而使微积分成为一门崭新的、独立的数学学科。这个学科既非几何学，又非代数学，而是一门分析数学。

第二，两人的工作，都不像他们的先驱们那样，仅仅局限于解决某些实际问题的具体方法，而是把微积分建立在一般问题和符号运算的基础上，使微积分成为解决某些实际问题的普遍方法。

第三，他们二人都不像先驱们那样，把微分问题和积分问题看成互不相干的问题，而是看到了这两个问题之间的互逆关系，从而建立起微积分基本定理，并得出所谓的“牛顿-莱布尼茨公式”，正是这一步显示了他们同先驱者的区别，标志了微积分的诞生。不过二人都没有给出这个公式的严格证明，它的严格的证明是在19世纪由柯西作出的。

第四，他们二人起初都把微分学建立在对实无穷小运算的基础上。在作具体运算时，无穷小忽儿为非零之数，忽儿又是零，所以都遇到逻辑困难，都受到广泛的指责。为了克服这一困难，二人在后期都不同程度地摇摆到潜无穷思想。顺便指出，在二人的微分学中，都是先有微分（或瞬）概念，再通过微分（或瞬）定义导数概念。这同今天先定义导数概念，再通过导数定义微分概念的作法恰好相反。

（3）两人思想的不同点。

牛顿和莱布尼茨既然是在互相独立的情况下创立微积分的，必然各具特色，带来一定的差异。

第一，两人所使用的名称是不同的。牛顿的微积分称为“流数法”，包括由流量求流数以及由流数求流量两个基本问题，分

别相当于今天的微分法和积分法。莱布尼茨的“求差计算”和“求和计算”则分别相当于今天的微分法和积分法。两个人的符号也是截然不同的。由于莱布尼茨比较重视形式演算，所以他精心设计、反复改进，制定了一套至今沿用的符号，不仅对微积分，而且对整个数学的发展起了积极作用。

第二，两人建立微积分的出发点是不同的。在微分学问题上，牛顿主要（不是完全）从力学出发，以速度为模型建立了微分学，所以力学色彩浓厚，运动的观点比较明显；莱布尼茨主要利用“特征三角形”从作曲线上任一点之切线出发建立了微分学，所以几何味道浓厚，静态的观点比较明显。二人从不同的问题出发都进入微分学领域，可谓殊途同归。此外，莱布尼茨曾定义了高阶微分（不够严格），牛顿曾定义了高阶流数，实际是异曲同工。在积分学问题上，牛顿偏重于求微分运算的反运算，即今天的求不定积分运算；莱布尼茨则偏重于求微分的总和，即今天的求定积分运算。不定积分和定积分都是现代积分学的组成部分。

第三，两人的哲学思想的不同决定了他们关于微积分真理性的标准的不同。牛顿是一个机械论者，也是一个自发的唯物主义者，所以重视对自己方法的实践检验。尽管牛顿的方法有逻辑矛盾，但因用这个方法能得出正确的结果，所以在他的方法受到批评的困难年代，他并未失去信心。莱布尼茨是一个客观唯心主义者，重视理性检验，强调对自己方法的哲学解释。如果我们撇开他的唯心主义因素（如把数学真理归之于最高原理）和形而上学成份（如否定飞跃），仅从给一个重要理论寻找哲学根据这一点来说是有合理因素的。

第四，两人的学风也不尽相同。作为科学家的牛顿，学风严谨，小心谨慎。人们认为他其所以迟迟不发表他的微积分的代表作《流数法》的原因是没有找到合理的解释。有人说，牛顿是由

“一种病态的害怕别人反对的心理统治了他的一生”①。在“害怕”的背后可以看到他对科学严肃认真。但作为哲学家的莱布尼茨则比较大胆，富于想象，勇于推广。例如，当n为正整数时他得出

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},$$

这时他不加证明就理所当然地把n推广为实数。他说：“对于那些试图证明一切，甚至连最初的原理也想加以证明的人们的努力，我给予很高的评价，而且我自己也常常参与其事。但是我不赞成因过分的细密而阻碍了创造的技巧或者在这种借口之下抛弃最好的创造而以此剥夺其果实……。”②从二人学风的差异中似乎可以找到他们的著作在发表时间上有早有晚的根据。牛顿治学的严谨性和莱布尼茨的目光敏锐性均为科学工作者所敬仰。

2.3 概率论的产生和发展

概率论是以“概率”概念为核心形成的一门数学分科。一般认为，概率是偶然性事件出现的可能性大小的数值。实践表明，偶然性事件在个别的试验中毫无规律可言，但是在大量的试验中却呈现某种规律性。概率论就是研究大量偶然性事件的规律的数学。由于偶然性事件是客观世界中广泛存在的现象，所以概率论的应用非常广泛，它是联系实际最密切的数学分支之一。

1.概率论的甑踉

概率和统计在其发展的初期是难以区分的。它们的历史可以追溯到遥远的古代，比如，在公元前2000年的埃及古墓中已有正立

---

① M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第67页。

② Г.М.菲赫金哥尔茨：《数学分析原理》，人民教育出版社1960年版，第467页。

方体的骰子，在古代的游戏与赌博活动中就有概率思想的雏型。但是概率论作为一门学科，则酝酿于16世纪前后的两百余年之间，产生于17世纪中期前后。它产生的原因虽然是多方面的，但主要是由于当时保险行业的产生与发展以及赌博的盛行。

中世纪后期的西欧，伴随资本主义因素的增长，特别是海外贸易的急剧发展，保险行业应时而生。14世纪时在意大利出现了第一个海上保险行业。从此以后，在欧洲一些大的商业城市（如阿姆斯特丹等），相继出现类似的行业。这些行业在有大量风险的情况下日益兴旺。约从16世纪起，社会上又出现了人寿保险、水灾与火灾等保险行业。保险业的产生与发展，既向数学提出了问题（如需要估计偶然事件的概率，需要计算数学期望等），又为概率论的产生准备了素材。

一种游戏加以理论化，往往产生新的数学领域。赌博的盛行，为研究概率问题提供了优良的模型（如掷骰子的等概性明显，又可作重复试验），对概率论的产生起了催化剂的作用。16世纪前后，相当多的数学家对赌博中的问题有浓厚的兴趣。意大利的帕奇奥里在他的《算术、几何、比与比例集成》（1494年）一书中，就有如何分配赌金的讨论。稍后，意大利的塔尔塔利亚和卡尔丹诺都曾经研究过赌金如何分配问题。卡尔丹诺还写过著作《论赌博》（1663年）。尽管如此，他们三个人并没有得出赌徒分配赌金的正确方法，也没有建立概率论的基本原理，因而他们的工作还算不上是概率论的创始。然而，他们毕竟研究了概率论早期的重要问题，为概率论的产生作了准备。

2.古典概率论

概率论的产生是同费尔马、帕斯卡和惠更斯的工作分不开的。费尔马与帕斯卡是同时期的法国著名数学家，二人也是挚友。帕斯卡的朋友、赌徒C.D.梅累曾向帕斯卡提出这样一个问题：甲、乙两人相约赌若干局，谁先赢s局谁就是胜者，就可得

全部赌金，现在甲赢a（a<s）局，乙赢b（b<s）局，赌博终断，问二人应按怎样的比例分配赌金？帕斯卡接到了这个问题以后，意识到这个问题的复杂性，于是又将此问题转告费尔马，于是二人就这个问题开始了频繁的通信研究。在他们的来往信件中，不仅有关于这个问题的不同解法，有概率与数学期望的思想，而且还区分了概率与条件概率。他们的通信虽然当时没有发表，但仍被认为是概率论最早的几篇论文。在费尔马与帕斯卡的通信研究暂告一段落之后的几个月即1655年，荷兰数学家惠更斯来到巴黎，对二人所研究的问题很感兴趣。惠更斯收集了在此以前所有赌博中的问题，潜心研究，并得出了正确解法，于1657年出版了《论赌博中的计算》一书。在该书中，惠更斯认为："在许多情况下，我认为如果读者仔细研究对象，当可注意到你所处理的不只是赌博问题而已，其中实际上包含着很有趣、很深刻的理论的基础"。稍后的瑞士数学家J.伯努里（1654—1705）也曾经指出，以赌博为例子来叙述概率论仅仅是为了使模型简单和纯粹。可见，惠更斯等人研究赌博问题并不是单纯出于对赌博的兴趣，而是着眼于赌博中所反映出来的概率论的某些普遍原理。惠更斯这一著作是概率论发展史上第一部专著，它的出版是概率论产生的标志之一。

18世纪，对概率论有贡献的数学家很多。在这些代表人物的著作中，除了关于赌博问题的研究以外，已用概率论的基本原理解决人口问题、人寿保险问题、射击问题以及大地测量、天文观测等自然科学问题。J.伯努里的巨著《猜度术》（1713年）是概率论发展史上的古典名著之一。书中给出了赌徒输光问题的详尽解法，其中有今天的二项分布概率公式，也有最早的大数定律（伯努里定理）的证明等。可以认为J.伯努里是概率论这一学科的奠基人。他的侄子N.伯努里（1695—1726）曾提出著名的"彼得堡问题"。这问题是说：甲、乙二人赌博，相约甲掷一枚硬

币，如果甲在第n次（$n=1, 2, 3, \cdots$）掷出正面时，乙付给甲 2^{n-1} 个卢布，问在赌前甲应付给乙多少卢布才有权参加赌博，而且不吃亏（即二人获得卢布的数学期望相等）？这个问题提出后，在相当长的一段时间里是数学家们感兴趣的问题。N.伯努里的弟弟D.伯努里（1700—1782）对概率论也有贡献——主要是对误差理论的研究。著名数学家欧拉也曾研究过人口统计与保险理论，这从他写的《关于死亡率和人类增长问题的研究》和《关于孤儿保险》等文章的标题就可看出来。英国德莫弗的概率论著作是《机会的学说》（1718年）和《分析杂录》（1730年），其中有德莫弗—拉普拉斯定理当 $p=q=1/2$ 时的证明。英国的辛普生的概率论著作是《论机会的性质与规律》（1740年），这也是概率论早期重要著作之一。法国的自然科学家布丰的著作是《或然算术试验》（写于1760年，1777年出版），其中有著名的“投针问题”（又称“布丰问题”），这是早期概率论中典型的几何概率问题。1763年，即贝叶斯去世后的第二年，他的朋友印发了他的论文《论有关机遇问题的求解》。该文有古典概率的早期定义，有今天所谓的贝叶斯公式，还有著名的贝叶斯假设。对该文所提问题的研究、发展，形成今天西方概率统计中的贝叶斯学派。

从17世纪中期概率论的产生到18世纪末约一个半世纪的时间里，概率论主要以计算各种古典概率问题为中心发展着，称为**古典概率时期**；由于这时期的概率论主要以组合论为工具，所以也称为**组合概率时期**。

3.分析概率论

从18世纪末到19世纪末的约一个世纪的时间里，在概率论的研究中引入了母函数与特征函数的概念，并逐渐引进了已经成熟的分析工具，特别是由拉普拉斯和高斯等人建立的关于“正态分布”以及“最小二乘法”的理论，对于用概率论研究天文观测、大

地测量和物理观测的结果起了重大作用，使概率论的发展进入了一个新的时期——分析概率时期。拉普拉斯的重要著作《分析概率论》（1812年）的出版，是这一转变的标志。拉普拉斯在1795年有一个题为《概率论的哲学探讨》的讲演，1814年《分析概率论》再版时，他把这个讲演稿作为该书的绪言发表。在该书中，拉普拉斯给出了古典概率的明确定义，引入了母函数概念，给出了德莫弗-拉普拉斯定理的证明。此外，书中还有丰富的统计材料，例如书中有一个例子，说明法国邮局历年因为地址不详而无法投寄的死信的比例是相当稳定的。法国的普阿松也是这个时期概率论的重要代表人之一。他最早引用“大数定律”一词，他的研究得到一种新的分布——普阿松分布。他的有关著作是《关于民事审判的概率研究》（1837年）和《打靶射击研究报告》，后者是对射击问题的专门论述，是着重研究实际问题的概率论著作。

概率论的产生与发展，表明人们对偶然性与必然性之间的辩证关系有了进一步的认识，但是这却被某些唯心主义者歪曲利用。他们说，“从小规模看来一切都没有什么秩序”，而把大量个别零碎场合归并在一起，就“可阐明隐蔽着的神的秩序的法则”。①在人口统计中，男女人数基本相同这一事实也成了某些学者论证神的存在的证据。18世纪英国皇家学会的一个会员就说：“男女人数的均衡不是偶然的结果，而是神的意旨，为了善的目的。”②但当进一步调查发现男婴略多于女婴时，该学会另一个会员又说，男孩与女孩不以偶然的比例出生，而使男孩有一些富余，这是“上帝要籍以均衡男性易于遭受较大的危险性”③，以此公开为资本主义的侵略战争辩护。

---

①②③ 转引自Б.В、格涅坚科：《概率论教程》，高等教育出版社1955年版，第379、378、379页。

进入19世纪，出现了对概率论某些基本原理的胡乱搬用，比如，不少人不懂得法庭是阶级专政的工具，而把概率论应用于法庭，并企图论证资产阶级法庭只要依赖多数人的证词就不会错判。与此同时，形而上学思想在概率论中也有深刻的反映。一种观点是只承认必然性，否认偶然性。例如，拉普拉斯在《概率论的哲学探讨》中说："假如有人知道了在某一时刻支配自然的一切力，以及它的一切组成部分的相对位置，又假如他的智力充分丰富，能把一切数据加以分析，把宇宙中由最大的物体以至最细小的原子的一切运动完全包括在一个公式里面，这样对他就没有什么东西是不确定的了，未来的也好，过去的也好，对他都一览无遗的了。"① 在拉普拉斯看来，偶然性只是人类无知或认识不完全的表现，人类终将能发现一种公式，把一切偶然性都表现为必然性，就像天体运动服从万有引力一样。这是典型的形而上学决定论，显然有很大的局限性。还有一种观点是只承认偶然性否认必然性。例如，某些马赫主义者就持这种观点。在他们看来，必然性的规律不过是人们为了"方便"而创造的符号、记号，公开宣称，"必然性属于概念世界，不属于知觉世界"。此外，也有人引用所谓"贝特朗悖论"否认概率的客观性，宣扬概率的主观性与人为性。该悖论是说，在定圆内任意作一弦，其长大于该圆内接正三角形的边长的概率按不同解法可得1/2、1/3及1/4。其所以产生悖论，是由于在这个问题中未给出"任意作一弦"这个概念明确的定义，因此，把三个不同问题的答案混作同一个问题的答案了。

唯心主义和形而上学的渗入，使概率论的声誉受到影响，也影响了概率论在19世纪的健康发展。

从19世纪末到本世纪40年代末的半个世纪中，由于物理学、

① 转引自《计算机应用与应用数学》1976年第1期，第54页。

力学以及数理统计学的发展，为概率论的应用提供了新的广阔场所，使其发生了深刻的变化。这一变化最初集中表现在俄国彼得堡学派的三个代表人契贝谢夫、马尔科夫与李雅普诺夫的工作中。他们的工作主要是把随机变量引入概率论，并且进行了广泛的应用，建立了契贝谢夫不等式，证明了大数定理与中心极限定理以及提出马尔科夫链等。在本世纪20年代以后的20多年的时间里，除苏联继续保持发展的势头之外，法国、美国、德国以及英国等国家也赶了上来，涌现了一批代表人物，如前苏联的辛钦与柯尔莫哥洛夫，美国的杜布与费勒，法国的波雷尔与P.莱维，德国的封·米塞斯以及英国的费谢尔等人。波雷尔改进了大数定律得出强大数定律；P.莱维推广了中心极限定理；辛钦提出了在时间中均匀进行的平稳理论；费勒和柯尔莫哥洛夫发展了马尔科夫链；封·米塞斯提出概率的统计定义，并引入样本空间概念，费谢尔发展了概率的统计观点，经过波雷尔等人的工作，逐渐形成了概率论的测度方法；以柯尔莫哥洛夫为代表建立了概率论的公理化体系，从此概率论才有了严格的逻辑基础。经过这些代表人物的工作，概率论走向了一个新的高峰。所以本世纪的20年代和30年代，被人称为概率论的英雄时代。

4.现代概率论

从本世纪50年代开始，概率论的发展又进入一个新的历史时期——现代概率时期。在此以前，概率论主要把概率问题变成分析问题来解决，解决后再研究其概率含义；研究的重点是极限分布理论以及通过概率分布来研究随机过程。从50年代起，概率论形成了自己的方法——随机分析方法；研究的重点是过程的样本函数性质，如右连续性、连续性、有界性、有无第二类间断点、跳跃性以及阶梯性等。在现代化技术的刺激下，它的理论和应用都有显著的发展，出现了理论概率与应用概率的分化。电子计算机的产生与发展，给比较复杂的、大量的计算问题提供了有力的

工具，为理论概率与应用概率的发展开辟了广阔的场所。

现代概率论所研究的内容大致可分为极限理论、独立增量过程、马尔可夫过程、平稳过程和时间序列、鞅和随机微分方程、点过程等。此外，属古典概率的一些问题，如几何概率和用组合数学方法解决只涉及有限个基本事件的概率问题等，仍有人继续研究，并有新的发展。还有，应用概率的发展也占有特别重要的地位。现在，概率论已被广泛应用于解决工农业生产、军事技术和科学技术中的问题。在不久以前产生的控制论、人工智能、图像识别和可靠性研究等应用学科中，概率论已成为它们处理问题的重要工具。刚刚发展起来的概率仪表，可用来监督自动化生产过程和处理大量数据。现代概率论是联系实际最紧密的数学分支之一。

概率论同其它一些科学相结合产生了不少边缘学科，如生物统计、统计物理学以及统计预报等学科。将概率论方法应用于解决某一类问题而又产生了不少新的数学分支，例如，把它应用于公用服务事业而产生了“排队论”，应用于通讯技术而产生了“信息论”，应用于自动化生产而产生了“控制论”，以及应用于生产和计划组织而产生了“随机运筹学”等。此外，概率论还向已有的数学分支渗透并产生了随机微分方程、随机几何学以及随机积分等边缘学科。现代概率论已经是一个非常庞大的数学分支。

需要说明的是，概率概念虽被各国广大科技工作者接受并广泛地应用，然而自它产生以来，在不同的历史时期以及在不同的科学家那里，对它的理解并不完全相同，一些人提出的解释被另一些人所批评。今天，并没有一个被所有数理统计学家都接受的解释，争议不断。由于对概率概念的理解不同，在国外数理统计学界形成不同的学派：贝叶斯学派、频率学派、信念（Fiducial）学派。在国内，频率学派的观点占绝对优势，几乎所有概率论的

专著、教材都持这一观点。我国长期以来对其它学派的介绍、研究几乎没有。应正确地对待学术上的争论，不能一看到“信念”、“先验”，就认为人家是唯心主义而简单地予以否定，而应当了解、研究、吸取各学派的合理成分，促进数理统计学的发展。

2.4 16～18世纪的数学哲学

1．16、17世纪的毕达哥拉斯主义

在16、17世纪的所有科学中；数学不仅是最成熟的学科，而且也是当时的带头学科。不仅如此，这时期的思想界和数学家，受毕达哥拉斯、柏拉图以及中世纪神学某些思想的影响，认为自然界的现象不仅互相联系，而且是按照统一的规律运转的，这个统一的基础在他们看来就是数学。这是毕达哥拉斯学派观点的继续。M.克莱因说，他们认为“上帝是按数学方式设计了大自然的”①。因此，他们实际上都是毕达哥拉斯主义者。

在17世纪前后的约两百年的时间里，一批优秀的科学家在这一思想的鼓舞下，充满了寻求大自然的数学规律的热情。哥白尼、第谷·布拉赫、开普勒、伽利略、帕斯卡、笛卡尔和牛顿等，都不止一次地谈到上帝通过他们的数学方案给予宇宙以和谐。比如，开普勒试图用五种几何模型（正的4、6、8、12、20面体）论证宇宙的和谐，但没有成功。后来他从第谷·布拉赫所观测到火星运行的数据中，终于发现行星运动三定律，成为“天空立法者”。又如伽利略曾说：“上帝在自然界的规律中令人赞美地体现出来的并不亚于他在圣经字句中所表现的。”②

---

① M.克莱因：《古今数学思想》第1册，第252页。

② 转引自上书，第252页。

对此，莱布尼茨又补充说："世界是按上帝的计算创造的。"①可见，在当时知识界中，数学被推崇到绝对真理的至尊地位。文艺复兴时期重要代表人之一达·芬奇认为，数学作为真正的科学可以把沉默强加于争辩者之舌②，意即数学逻辑严密，令人信服，是绝对真理。他还说："任何人的研究，没有经过数学的证明，就不能认为是真正的科学。"③伽利略曾把宇宙看成是一部用数学语言写出的巨著，并认为："数学知识不但是绝对真理，而且像圣经那样，每句每行都是神圣不可侵犯的。实际上，数学更优越，因为对圣经还有许多不同的意见，而对数学真理，则不会有不同的意见。"④

毕达哥拉斯主义者实际是用数学规律取代上帝创造宇宙并使之和谐的学说，该学说虽然含有数学有广泛应用的合理成分，但作为一种哲学观点则是错误的。

承认数学理论具有真理性是一回事，数学理论要不要通过实践检验却是另一回事。欧洲哲学史表明，这一时期的哲学家对数学的起源和数学真理性的解释是不同的，这就是下面将要谈到的唯理论和经验论。

2．17世纪唯理论的数学观

唯理论虽有唯物与唯心之分，但他们的认识论却有共同点，这就是：重视数学演算与逻辑推理，强调演绎法；认为包括数学在内的科学是人们理性或"天赋观念"的产物；只承认科学的普遍性与必然性，否认感性认识的真实性。例如，唯理论的重要代

---

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第1册，第252页。

② 参见关肇直：《变量的数学孕育与诞生时期一些学者对数学的看法》，载《自然辩论法研究通讯》1960年第1期，第47页。

③ 转引自Ь.В.鲍尔加尔斯基：《数学简史》，知识出版社1984年版，第119页。

④ 转引自M·克莱因：《古今数学思想》第2册，第33页。

表笛卡尔是怀疑一切的，但是他从来不怀疑“我”的存在和数学的真理性。他认为科学的本质是数学，他深信从无可争辩的数学公理出发可以把自然界的一切知识都演绎出来，也就是说，数学公理不仅是数学的基础，而且也是一切科学的基础。他说：“（我）既不承认也不希望物理学中有任何原理不同于几何学和抽象数学中的原理，因为后者能解释一切自然现象，并且能对其中一些现象给出证明。”① 稍后的莱布尼茨又对笛卡尔的唯理论作了发展，把笛卡尔关于上帝是天赋观念以及几何公理和某些逻辑规律是天赋观念推广为一切观念都是天赋的。

莱布尼茨是后来数学基础研究中逻辑主义的先驱。他从自己的认识论出发把真理分成两种：事实真理和理性真理，并认为前者是偶然性真理，后者为必然性真理。对于理性真理他又分为两种：原始真理和逻辑真理。对前者他认为不可能证明，也不需要证明，是不能“打破砂锅问到底”的；对后者就是他提出的“（不）矛盾原则”，数学真理就属于逻辑真理。莱布尼茨发挥了笛卡尔的“天赋观念”，例如他说：“我甚至认为我们灵魂的一切思想和行动都是来自它自己内部，而不能是由感觉给与它的。”② 莱布尼茨还强调了真理的先天性，他说：“无可争辩的是感觉不足以使人看出真理的必然性，而因此心灵有一种禀性，来自己从自己内部把这些必然真理抽引出来；……必然真理的原始证明只来自理智，……而对于一个普遍的真理，不论我们能有关于它的多少特殊经验，如果不是靠理性认识了它的必然性，靠归纳是永远也不会得到对它的确实保证的。”③ 对数学，他说：“全部算术和全部几何学都是天赋的和以潜在的形式存在我

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第29页。

② 莱布尼茨：《人类理智新论》，商务印书馆1982年版，第36页。

③ 同上书，第49页。

们心中的，所以我们只要注意地考虑并顺次序安排好那已在心中的东西，就能在其中发现它们，而无需乎利用任何凭经验或凭旁人的传统学到的真理。”①

显然，在唯理论者看来，数学的真理性是主观的，它既不来源于客观实际，也无需回到实践中去接受检验，它是天然地合理的，是“天赋的真理”。同这种认识论相联系，唯理论者在方法论上是演绎主义者，他们片面地否定或贬低归纳法的作用，认为科学真理都像几何学一样，是从几个先天的公理中演绎出来的，演绎法是科学产生、发展的唯一方法。但这一观点受到归纳主义者的反对。其理由主要有二：第一，演绎推理的根本规律是同一律（A＝A），它的本质是同义反复，不可能给人以任何新的知识；第二，演绎推理的正确性依赖于其大前提的正确性，而大前提的正确性又依赖于另一个大前提的正确性，如果单纯依赖演绎法，必然陷入无穷倒退的逻辑陷阱之中。

3、17、18世纪经验论的数学观

在唯理论产生的同时，也产生了它的对立面——经验论。经验论也有唯物论的经验论与唯心论的经验论之分，不过它们的认识论也有相同或相似之处，这就是：重视观察和实验，强调经验和归纳法，只承认感性知识的真实性，认为科学知识是感觉经验的组合物，否认科学知识的必然性和普遍性。例如，英国的洛克是唯物论的经验论的代表人，在他的著作中论证了F·培根和霍布斯关于人类全部知识起源于感性世界的基本原则，认为在经验之前根本不存在人脑所固有的“天赋观念”。他指出，人的心灵就像一张白纸，没有任何天赋的东西，犹如儿童和白痴不知道数学和逻辑规则一样。这是洛克思想的主导方面，但是，他在知识的分类问题上表现出一定的不彻底性。他把经验分成两类：由感觉引

---

① 莱布尼茨：《人类理智新论》，第45页。

起的外部经验和由反省引起的内部经验。与经验的分类相对应，他把知识也分成两类：关于具体事物的知识和关于抽象概念的知识。对于数学，他认为同“道德”等一样属于抽象概念的知识，它来自“和外物毫无联系”的“内部反省”。按洛克的见解，数学观念只是一种“样式”，而“样式”是指一种并不独立存在的观念。比如他说：“复杂样式观念和关系观念，都是原本，都是原型，它们不是摹本，不是按照任何一种真实存在的模型形成的，心灵并不期待它们和一个模型相契合，精确地相对应。”①虽然洛克也谈到数学的实在性，但是他所说的实在性是指一种“观念的存在”；他虽然反对莱布尼茨的“天赋观念”，但却把心灵看成独立的“精神实体”。可见，洛克对数学从而对数学的真理性问题实际是唯心主义的立场，这一立场曾被稍后的休谟继承和发展。

英国的休谟是唯心论的经验论的代表者，也是不可知论者（又叫怀疑主义者）。他断言科学的对象不应是经验之外的客观事物，因为它们是否存在是不可知的；科学的对象应是感觉经验事实。和洛克类似，他也把知识分为两类：观念的知识和实际的知识；除此之外再没有了，若有就是“诡辩和幻想”。对前者他持先验主义的立场，而对后者则持经验主义的立场。他认为数学是观念的知识，他说：“属第一类的有几何、代数、三角诸科学；……总而言之，任何断言，凡是有直觉的确定性或解证的确定性的，都属于前一种。……这类命题，我们只凭思想作用，就可以把它们发现出来，并不必依据宇宙中任何地方存在的任何东西。”“至于人类理性的第二对象（实际的事情）就不能在同一方式下来考究；而且我们关于它们的真实性不论如何明确，而那种明确也和前一种不一样。各种事实的反面总是可能的。”②休

① 《16—18世纪西欧各国哲学》，第395页。

② 休谟：《人类理解研究》，商务印书馆1972年版，第26页。

谟是经验论者，如何解释他关于数学命题的先天性和必然性呢？休谟的观点和洛克一样，这就是：数学命题所表明的只是观念的关系，而与客观事实完全无关。比如他说："'直角三角形弦之方等两边之方'这个命题，乃是表示这些形象间关系的一个命题。""自然中纵然没有一个圆或三角形，而欧几里得所解证出的真理也会永久保持其确实性和明白性。"① 可见，他是通过对数学命题的客观性的否定来解释数学的必然性和先验性的。休谟在数学和数学真理问题上同洛克一样，实际也是站在唯心主义的立场上。

在方法论上，经验论者强调归纳法，片面地否定或贬低演绎法。例如，洛克明确地说，"知识不是由公理得来的"②。但是这个观点却受到演绎主义者的反对，主要理由是：已有的经验并不能保证对以后的经验有必然性。例如，欧洲人从世代所看到白天鹅的经验中归纳出"凡天鹅皆白"的结论，后来在别的地方发现黑天鹅而被否定。但是归纳主义者休谟经过研究仍认为：归纳知识的必然性既不可能有逻辑根据，也不可能有事实根据，仅仅是一种心理上的"信念"，即过去经验的多次重复在人们心理上造成的一种"想象"；"信念"和"想象"虽不可靠，但对于人类的认识仍是必需的，没有它们就没有科学。但是演绎主义者问道，如果把数学包括在内的科学建立在主观"信念"和"想象"的基础上，科学岂不太不可靠了吗？

4. 18世纪先验论的数学观

由上述可知，唯理论者笛卡尔、莱布尼茨把知识分成两类：理性知识和事实知识，数学属于理性知识。经验论者洛克、休谟也把知识分成两类：观念知识和经验知识，数学是观念知识。两

① 休谟：《人类理解研究》，第26页。

② 洛克：《人类理解论》，商务印书馆1959年版，第636页。

派说法虽不同，实际上都把知识分成两类：经验知识和逻辑知识，而数学属于逻辑知识。德国著名哲学家康德则认为这种分类不准确。他认为，科学知识必须具有两个特征：一为普遍性和必然性，一为能扩大知识内容，给人提供新的知识。他从分析判断（指宾语属于主语的判断，如“物体有广延性”等）和综合判断（指主语包含不了宾语的判断，如“天鹅是白的”等）出发，把知识分成如下三类：

(i) 由先天分析判断得出的分析命题；

(ii) 由后天综合判断得出的经验命题；

(iii)由先天综合判断得出的综合命题。

康德用他对知识的“三分法”代替了在此以前对知识的“两分法”。康德认为，分析命题（即唯理论和经验论所谓的逻辑知识）虽然具有必然性和普遍性，但因其宾语概念已经包含在主语之内，不能扩充知识，不能提供新知识；经验命题（即唯理论和经验论所谓的经验知识）虽然能提供新的知识（宾语概念不包含在主语之中），但它不具有必然性和普遍性。康德认为，只有先天综合命题（例如：“两点间的距离直线最短”，“2＋3＝5”等）兼有前两类命题的优点，既能扩充知识，又具有必然性和普遍性，是真正的知识，数学就属于这一类。不仅如此，康德认为数学是这一类知识的典型，他说：“数学给我们一个光辉的榜样，它告诉我们，独立于经验，在先天知识方面能往前走多么远。”① 他还说，“严格的数学命题都永远是先天的判断，而非经验的判断，因为它们具有不能来自经验的必然性。”②

进一步的问题是，为什么数学命题既是先天的、又是综合的呢？也就是它的必然性是从哪里来的呢？康德回答得很干脆：是

①② 《18世纪末—19世纪初德国古典哲学》，商务印书馆1960年版，第5、9页。

理性所给予的。既然是先天的，就不可能是经验的，只能是来自理性本身，所以必须对理性进行分析。分析理性，又必然涉及感性。为了说明理性对感性的作用，康德认为感性只有两种纯粹的形式：空间（是外感官形式）和时间（是内感官形式）。康德对它们进行详尽地分析的结果认为：空间和时间都是先天的概念，虽然时间与空间有所不同。康德说："空间不是一个关于一般事物的关系的推论概念，或者说一般的概念，而是一个纯直观。"① "时间不是一个推论的概念，或所谓一般的概念，而是感性直观的一个纯形式。"②根据这样的分析，康德的结论是：几何学是关于空间的知识，由于空间具有先验性和直观性，所以几何命题是先天综合判断；同样，算术是关于时间的知识，由于时间的先验性和直观性，所以算术命题也是先天综合判断。我们把康德的思想说得更明白些就是，纯数学（几何和算术）来源于理性（先验性和直观性），是人的理性活动的结果。康德所说的"直观"或"纯直观"实际就是"直觉"。所以在康德看来，纯数学就是建立在直觉基础之上的学科；是人先天综合能力或观念所赋予经验世界的，这就是康德"人为自然立法"的理论。17世纪的洛克曾把数学说成是"直觉的知识"，比如他说，"像这一类的真理（如：圆形不是三角形，3＞2，3＝1＋2等），心灵只要对那些在一起的观念一看，单凭直觉，不必插入其他的观念，就觉察到了。"③康德则进一步为其作了解释：直觉不再被解释成人们关于认识对象的一种直接把握的能力，而是说成是一种创造性的思维活动，正是在这种创造性的思维活动中"理性给某些已有的概念附加上完全在它们以外的概念"，也就是说直觉创造了数学概念。康德这一思想对以后的数学哲学影响很大，比如现代直觉

①② 《18世纪末一19世纪初德国古典哲学》，第18、23页。

③ 《16—18世纪西欧各国哲学》，第422页。

主义者就继承了康德这一思想。

康德关于两种判断（分析判断和综合判断）的思想，对以后西方哲学的发展也有一定的影响；若不趋于极端，是对认识论的一个贡献。康德关于时间和空间的思想既有“客观经验的实在性”，也有“先验的理想性”。① 这种关于时、空“二元论”的思想在一定的意义上比之柏拉图、笛卡尔、莱布尼茨和休谟的一元论思想是一个进步。康德强调意识（科学思维）的能动性与认识的能动作用是正确的，但是他把这种能动作用先验化了。因此，在数学本体论问题上，康德本质上为我们提供了一幅颠倒了的图画——纯数学不是建立在对客观世界正确抽象的基础上，而是建立在先验的、纯直觉的基础之上。因此，康德始终无法回答先验的知识为什么会有客观必然性的问题，即彼岸世界同此岸世界的必然联系的问题。19世纪数学的发展宣告康德先验论的数学观的破产。例如，非欧几何的产生否定了欧氏几何的先天必然性，集合论的产生否定了有穷算术的先天必然性等。

2.5 代数学的发展

1.对四次以上代数方程根式解的寻求

在17、18世纪，代数学的中心问题是解方程。一次方程 $ax+b=0$ 因过于简单，只要用简单的除法就可以求得到它的解。二次方程 $ax^2+bx+c=0$，从巴比仑的泥板到9世纪的阿拉伯，再到12世纪的印度，公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

已经形成，只要承认负数、无理数和虚数也就够了。解三次和四

① 参看《16—18世纪西欧各国哲学》，第21页。

次方程的公式在16世纪已先后由塔尔塔利亚和费拉利分别给出。解三次方程实际是归结为相继解一个二次方程和一个只有两项的三次方程（$x^3 = A$）。解四次方程实际归结为相继解一个三次方程和一个二次方程。由于二、三、四次方程的根都可以通过对它们的系数进行四则运算、开平方和开立方而得到，因此，人们通常就说二、三、四次方程是可以用根式解的。

自16世纪得到三、四次方程的根式解法以后，寻求四次以上方程根式解的研究便提上日程。在18世纪，一方面由于代数基本定理的证明强化了解决这一问题的愿望；另一方面微积分的发展也促使代数学的发展，例如产生了方程根的存在定理等。因此，代数方程论发展得较快。正如J.伯努里（1667—1748）在给欧拉的一封信中所说："我介绍高等分析的时候，它（指方程论）还是一个孩子，而你正在把它带大成人。"① 积分法中的部分分式法提出：是否任何实系数的多项式都能分解成线性因式之乘积，或分解为一次与二次因式的乘积，以避免用复数？对这个问题，数学家的见解不同。莱布尼茨不相信任何多项式能分解成一次和二次因式的乘积，除非用到复数。欧拉认为可以，虽无一般性证明，但欧拉论断直到六次多项式都能成立。拉格朗日虽然证明欧拉的结论具有普遍性，可惜他的证明并不严格。1799年，高斯在他的博士论文中证明了实系数的n次多项式能表示成一次和二次实系数因式的乘积。

高斯虽然解决了实系数多项式方程的根的存在性问题，但是，多项式方程能否用根式解却是另一个问题。所以从17世纪开始，这两个问题同时被人注意。

莱布尼茨的朋友奇尔恩豪斯是最早对四次以上方程根式解作出努力的一位。1688年，他宣称五次方程的一般解法已经解决

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第344页。

是莱布尼茨很快指出，用他的方法解五次方程时，还必须次数高于五次的方程，所以这个方法无用。

于这一问题难度很大，所以人们自然地把注意力集中在最的高次方程$x^n-1=0$的情形。德模弗等用复数证明了解$x^n-1=0$相当于把圆周n等分。但因三角解同根式解并不相同，所以他正确指出，当n是奇素数时，$x^n-1=0$可以式解。1771年，范德蒙特在一篇论文中断言，只要n是素方程$x^n-1=0$就可以用根式求解。实际上，他只验证到止的素数成立，所以他的断言根据并不充分。高斯在他的术研究》(1801)的最后一节对二项方程$x^p-1=0$(p为)进行了全面的研究，并且证明了：只要p是素数，方程$-1=0$就可以用根式求解。高斯的结论具有重要意义。进需要查明的是，可用根式解的是所有二项高次方程还是部分高次方程。

对于一般的n次多项式方程的根式解问题，范德蒙特在他1771年的论文中也作了详细讨论。拉格朗日在1770—1771年发表的长达200多页的论文《关于方程的代数解法的思考》中讨论得更多。二人的思路也很类似。拉格朗日在他的这篇论文中给自己提出的任务是：分析二、三、四次方程的解法，再看看这些方法对解更高次方程有什么启示。拉格朗日经过分析觉察到方程根的"置换"极为重要，甚至认为这是"整个问题的真正哲学"（即解决这一问题的关键）。他从这一认识出发导出了和传统解法不同的方法。例如，拉格朗日用这一理论把一般的四次方程解法归结解一个所谓的"拉格朗日辅助方程"，这个辅助方程是三次的。同理，可以解二次和三次方程。但当他用这一理论解五次方程时，所产生的"辅助方程"却是六次的，他的努力失败了。后来他在自己的回忆录中说："用根式解四次以上的方程的问题是不可能解决的问题之一，虽然关于解法的不可能性什么事情也没有证

明。"①用根式解高于四次方程的问题，经过将近三个世纪力仍然悬而未决。正如拉格朗日所说的那样，它好像是在向的智慧挑战。

拉格朗日的学生、医生、政治家鲁菲尼在1799年和18先后发表过两篇论文，试图证明高于四次方程的根式解的不性。今天看来，他的结论是正确的，但是因为他在证明过程中一个没有证明的命题（即今天的阿贝尔定理），所以他的证不严格。

挪威的青年阿贝尔中学时代就阅读拉格朗日和高斯的有关作，并对用根式求解高于四次方程问题发生兴趣。起初，他相这个问题可以得到肯定的解决，并给出了一个证明。但他很快现了证明中的错误，随之改变了方向——试图给问题以否定的决。他从拉格朗日的著作中得到启发，着手考察可用根式求解方程的根有什么性质。1824年，他首先成功地证明如下的定理如果一个方程可以用根式求解，则出现在根的表达式中的每个式，一定都可以表示成方程的诸根和单位根的有理式。

例如，设二次方程 $ax^2+bx+c=0$ （$a\neq0$）的两个根为 x_1、x_2，则

$$x_1=\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}),$$

$$x_2=\frac{1}{2a}(-b-\sqrt{b^2-4ac})。$$

根式 $\sqrt{b^2-4ac}$ 可以写成：

$$\sqrt{b^2-4ac}=a(x_1-x_2)。$$

又如，设既约三次方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根为 x_1、x_2、

① 转引自A.A.亚历山大洛夫等：《数学——它的内容、方法和意义》第1卷，第288页。

x_3，则其中两个根号可分别表为：

$$\sqrt{-\left(\frac{p}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}}=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{q}{3}\right)^3}=\frac{1}{27}(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)-\frac{1}{2}x_1x_2x_3$$

阿贝尔在这个定理的基础上证明了如下的定理：一般高于四次的方程不可能用根式求解。阿贝尔有关这一问题的论文1826年在《纯粹与应用数学杂志》上发表。拉格朗日虽然预见到了阿贝尔的结论，但没有证明。这一结论说明，人们为之作出将近三个世纪的努力为什么没有成功的原因：原来高于四次的一般方程不像二、三、四次方程那样有一个通用的求解公式。

高于四次的一般方程不可能用根式求解，并不等于每一个高次方程不能用根式求解。比如，高斯已经证明：当p是素数时，$x^p-A=0$ 可以用根式求解。所以进一步的问题是：哪些高次方程可以用根式求解，哪些高次方程则不能用根式求解。年青的阿贝尔试图刻画全部能用根式求解的方程的特性，并取得了某些进展，比如，他得到了今天所谓的“阿贝尔方程”：如果一个方程可用根式求解，则该方程的所有根都是其中一个根的有理函数。可惜，贫困与病魔过早地夺走了这位天才数学家的生命，使他未能实现自己的愿望。伽罗瓦在阿贝尔的工作的基础上，建立了“伽罗瓦理论”，完满地实现了阿贝尔的遗愿。

2.伽罗瓦理论的产生

伽罗瓦出生于巴黎近郊的拉赖因堡，父亲是一个自由主义思想者，曾任这个小城市的市长，很早去世。母亲受过良好的教育，很有教养，是伽罗瓦的启蒙教师。伽罗瓦16岁中学毕业，渴望进入巴黎综合工科学校，但连续报考两年均未被录取。18岁进入法国的高等师范学校。他自幼性情刚直，执着追求真理，关心国家命运，终因言论激烈而得罪学校当局，被校方开除。接着又

由于参加政治活动两次被捕入狱。出狱不久，由于爱情上的纠纷不能自持，于1832年5月31日与人在一场无谓的决斗中遇刺身亡，死时年纪不足21岁。

伽罗瓦在读中学时，对数学有浓厚的兴趣和惊人的理解能力，对学校所设的数学课觉得平淡无味。他直接阅读拉格朗日、高斯以及柯西等著名数学家的原著。16岁在家待业时就研究高于四次方程的根式求解问题。1829年5月即他17岁那年，写了关于代数方程可解性论文，经由柯西转交给科学院，但他们不够重视而且把原稿丢失了。1830年2月他重写，并再次提交给科学院。他本希望能得到数学大奖，但由于审稿人傅利叶不久去世，原稿再次丢失。对此，伽罗瓦曾提出强烈的抗议。院士普阿松劝他再写一次。1831年他又写了题为《关于用根式解方程的可解性条件》一文，由普阿松审稿。四个月以后，普阿松提出审查报告，结论是"完全不可理解"，并把原稿退回。不过普阿松建议他再作详细的阐述。这时正是伽罗瓦与人决斗的前夕，他无心顾及此事，仅仅赶写了一份关于自己见解的"说明"，连同原稿一起交给他的一位好友保存。这个"说明"同1831年的原稿被保存下来。

1846年，也就是伽罗瓦死后14年，数学家刘维尔将伽罗瓦的手稿发表在自己主办的《数学杂志》上。由于伽罗瓦的理论极为深奥，即使当时的一流数学家也不理解，所以没有得到应有的评价。后来有人说，让当时的人评论伽罗瓦的理论就像让聋子去评论一曲美妙的音乐一样。尽管他只活到不足21岁，遗稿共计不过60页，但他是公认的19世纪最杰出的数学家之一，是迄今为止的数学史上唯一最年轻的一颗一闪即逝的巨星。

现在我们再简述一下伽罗瓦思想。简单地说，伽罗瓦理论就是用群论的方法来研究代数方程解的理论。伽罗瓦接受并改进了拉格朗日的思想来研究可用根式求解的代数方程的特性。他和拉

格朗日一样，用了方程根的置换即排列概念。对于任一个n次方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$，它有n个根：$x_1$，$x_2$，…，$x_n$。这n个根共有n！个置换，它们的集合关于置换的乘法构成一个群，叫做该方程的根的置换群。包含方程系数的最小域叫做它的系数域。包含方程所有根的最小域叫做它的根域。系数域是根域的子域；从系数域出发，逐步扩域可以得到根域。根据伽罗瓦理论，一个方程可否用根式求解，与根域性质密切相关。如果从系数域到根域的扩域过程中每次添加的都是根式，则方程可用根式求解；否则，不能用根式求解。用这一理论可以证明二、三、四次方程可用根式求解。对于高于四次的代数方程，需要的是在不知道根的情况下判别它可否用根式求解。伽罗瓦为了确定扩域过程中的添加项，使用了预解式概念，并给出构造预解式的方法。伽罗瓦证明了：如果扩域过程中所有预解式都是指数为素数的二项方程$x^p-A=0$，则原方程可用根式求解；如果预解式的指数不全是指数为素数的二项方程，则原方程不能用根式求解。这样，任一个方程能否用根式求解的问题，可以完全用伽罗瓦的理论去判别。

顺便指出，伽罗瓦理论也给数学中古老的用直尺与圆规作图的可能性问题在更高的层次上提供了一个判别方法。例如，用这一理论可以证明：几何三大难题是不可解的。再如，用直尺和圆规可以作出正的三、四、五、六、八、十等多边形，但是不能作出正的七、九、十一等多边形。

伽罗瓦理论不仅完满地解决了高次方程的根式求解问题，更重要是通过这一问题的研究，他引进了置换群的正规子群和数域的扩域以及群的同构等概念，从此代数学的发展进入一个新的阶段——抽象代数阶段。当然，伽罗瓦没有用今天的名称，但是在他的工作中明确用到这些概念。他也认识到他的工作的意义，他曾经说过，他的工作不打算成为解方程的实际

方法①。

3. 群论的早期工作

伽罗瓦的遗稿是在1832年决斗致死前夕赶写而成的，自然比较粗糙。1866年，塞雷特在他的《高等代数教程》一书的第三版中对伽罗瓦的工作作了介绍。最早认识到群的价值并且大力提倡的是英国的代数学家凯莱和德国的狄德金。凯莱于1849和1854先后写过两篇文章介绍群的思想，并给群下了一个抽象的定义，这个定义基本上就是今天的形式。鉴于这个概念的价值没有被当时人们充分理解，所以凯莱于1878年又连续写了四篇文章加以介绍和提倡。这四篇文章的影响很大。从此，人们普遍认识到抽象群比之置换群更概括、更抽象，包含的东西更多。

法国的若尔当对群论的工作是出色的。他的《置换和代数方程专论》（1870）一书是此后30年间群论的权威著作。在这部著作中，他系统地发展了有限群论，并把这一结果应用到伽罗瓦所开创的方向上，给伽罗瓦理论以全面、清晰的阐述；也用到现代群论中的四条公理，建立了同构和同态等概念。若尔当的学生F.克莱因于1872年从变换群的观念出发，把当时已有的各种几何学综合起来，并给出了明确的几何定义。这就是著名的“埃尔朗根纲领”（见第269—270页）。

挪威的数学家S.李是若尔当的另一名学生。1870年左右同克莱因一起研究连续变换群。不过他不像克莱因那样为了几何分类，而是为了阐明微分方程解的分类，并于1874年引入了一般的连续变换群，后来称之为局部李群。1883年在一篇文章中又引进了无限连续群。他的主要著作《变换群的理论》（3卷，1893）内容广博而深刻，但在他生前没有得到重视，直到本世纪初期才发出光彩。

---

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第3册，第157页。

这就是从伽罗瓦理论到抽象群的定义的形成简单过程，也是后来建立抽象代数的重要根源之一。

4.行列式和矩阵理论的形成

行列式和矩阵理论是现代数学特别是线性代数的重要工具，今天常常作为线性代数的内容之一。

行列式理论最早起源于代数学中解线性方程组。它的产生可以追溯到17世纪末期的莱布尼茨，而形成于18世纪。在克拉梅、范德蒙特和拉普拉斯等人的工作中已经用到行列式的思想。行列式的名称和现代符号则是19世纪的柯西给出的，并经西尔维斯特热情地提倡，被应用于许多数学领域。今天的行列式理论除其概念外，还包括它的性质、算法和应用。例如，在平面解析几何中，可用其表示过平面上已知二点的直线方程，以三个已知点为顶点的三角形面积，以及三点共线的必要充分条件等。在微积分中，行列式被用于多重积分的变量替换。现在行列式理论一般作为线性代数的组成部分。

矩阵理论可以追溯到18世纪，见之于著作则在19世纪。我们知道行列式是一个用文字排列的方阵，行列式只涉及它的值，即由行列式定义所给的值。因此，从逻辑上说，矩阵概念应先于行列式，但是历史的事实却恰好相反。人们在使用行列式时发现，对许多问题来说，它所涉及的并不是行列式的值，而只同方阵本身的性质有关。方阵就是一个特殊的矩阵。矩阵一词由西尔维斯特首次使用。矩阵的一些性质在高斯和艾森斯坦的工作中已经使用。英国凯莱首次引入矩阵符号，并围绕矩阵理论发表了《矩阵论的研究报告》（1858）等数篇文章，因此人们把他作为矩阵理论的创立者。

矩阵论的经典内容包括矩阵的相似标准形、矩阵的合同标准形、矩阵的求逆、矩阵的特征值与广义特征值等。现代矩阵论还包括矩阵方程论、矩阵分解论和广义逆矩阵等内容。经典的矩

阵理论是线性代数的重要组成部分。

行列式理论和矩阵理论的产生与发展，是数学语言的重大进步，也是数学和一些科学技术的有力工具。

2.6 非欧几何学及其意义

1.非欧几何学的先驱工作

非欧几里得几何学（以下简称非欧几何）的产生不仅是19世纪数学最重要的成就之一，而且对现代自然科学、现代数学以及数学哲学都有深刻的影响。它的产生溯源于对《几何原本》的“第5公设”的研究。

《原本》在第一卷给出了五个公设，其中前四个人们认为简单明了，符合亚里士多德公理“自明性”的要求，唯独第5公设即现在的“平行公理”，不仅文字啰嗦，而且所肯定的事实也不明显，比如，当两条直线相交于非常遥远的地方时，就无法判断这两条直线是否平行,因此不具有直观的明显性。所以自欧几里得以来，人们认为这是《原本》的一个“污点”（比如,1759年，达兰贝尔就说，这条公理是“几何原理中的家丑”）。人们总想去掉这个公设——试图通过其它的公设和公理予以证明，即把第5公设作为一个定理。《原本》的第一卷共48个命题，其中前28个命题的证明，欧几里得回避用第5公设，只有在第29个命题的证明中不得不用了一次，这是《原本》用第5公设的唯一的一次。看来欧几里得本人对这一公设也不太满意。似乎可以认为，第5公设问题已被欧几里得提了出来。

如何证明第5公设？自欧几里得起，先后沿两个方向进行：直接证明和间接（用反证法）证明。自《原本》问世的两千年以来，几乎称得起数学家的人都尝试证明过第5公设，并付出了辛勤的劳动，有时好像找到了证明，但是最后，或是自己或者被别

人发现在证明中的逻辑毛病——用了第5公设的等价命题。这种等价命题是非常多的，下边仅举出其中几个：

a.平面上不相交的二直线不能彼此远离。（普罗克鲁斯）

b.存在着两个相似而不相等的三角形。（瓦里斯）

c.存在一个四个角均为直角的长方形。（萨开里）

d.三角形的内角和等于两个直角。（勒让德）

e.存在着面积为任意大的三角形。（高斯）

f.每一个三角形都有一个外接圆。（波尔约）

g.圆的内接正六边形的边长等于这个圆的半径。

长期直接证明的失败，使人们的注意力逐渐转移到间接证明：从第5公设的否定命题出发，试图引出矛盾。一般认为，这一工作的开始，意味着非欧几何的酝酿。先后从事这一工作的人可以开出一个很长的名单，下面介绍其中有代表性的几位。

意大利的萨开里是第一个试图用反证法证明第5公设、且影响较大的一位。他的做法大致如下：

如图2.15，萨开里先作满足下述条件的四边形ABCD：$\angle A=\angle B=d$，$AD=BC$，再过AB之中点E作$EF\perp AB$。由于对称关系，他很快证得$\alpha=\alpha'$，如果再能证得$\alpha=d$，则全部证明就完成了。为此，他作了三种假设：$\alpha>d$，$\alpha<d$，$\alpha=d$。只要能否定$\alpha>d$和$\alpha<d$，则$\alpha=d$就证明了。

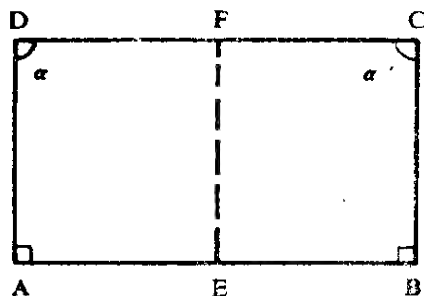


图2.15

萨开里从$\alpha>d$出发，很快引出矛盾，于是否定了$\alpha>d$。但

是，当他从$\alpha<d$出发时，却推导出很多。他的推论一个引出一个，直到第38个是：在平面上存在两条直线l_1和l_2，它们在一个方向无限地互相接近，而在其相反的方向上无限地分开，这样，l_1与l_2将在无限远点p_∞有共同的垂线l。他说，这显然是不可能的，是“矛盾”。其实，萨开里所发现的矛盾只是同欧几里得几何中相应命题的矛盾，而不是反证法所需要的逻辑矛盾。因此，萨开里自认为证明了第5公设，其实并没有证明。由于萨开里从假设$\alpha<d$出发所推出的一系列命题的目的是为了寻找他所需要的矛盾，即为了坚持欧氏几何，而不是为了建立另一种与欧几里得几何不同的几何学，所以他的工作只能是非欧几何的先驱工作。

瑞士的兰伯特所走的道路与萨开里极为相似，所证明的命题更多，但并未发现任何矛盾，他的结论是，在这个方向上的所有别的企图都不能达到目的。虽然他没有找出矛盾，但他对第5公设仍深信不疑。

法国勒让德的研究虽然没有建立非欧几何学，但是却建立了许多第5公设的等价命题；例如：

a.如果三角形的内角和等于两个直角，则第5公设成立。

b.如果至少有一个三角形的内角和等于两个直角，则所有三角形的内角和也等于两个直角。

c.如果存在这样的锐角，在它的一边上的任一点作垂线总与另一边相交，则第5公设成立。

d.对于任一个三角形，它的内角和不会超过两个直角。

需要说明的是，在勒让德的证明中，均假定直线可以无限延长，否则勒让德的某些证明就无法成立，于是便产生黎曼非欧几何。

2.非欧几何学的创立

数学史把非欧几何的创立归功于高斯、波尔约和罗巴切夫斯

基三人；高斯发现在先，而罗巴切夫斯基的成果发表在先。

德国的高斯是一个瓦工的儿子，自幼贫寒，受一位公爵之帮助而上学。1795年进入哥廷根大学，毕业后任该校教授。高斯一生在数论、代数学、微分几何、超几何级数、复变数函数论以及椭圆函数等方面均有开创性成就，是屹立于18、19世纪的数学巨匠，被称为“数学家之王”。

作为数学巨人的高斯，早在1792年，即他15岁的那年，就思考第5公设问题。那时他已经意识到除欧氏几何外，还存在着另一个逻辑上无矛盾的几何，其中欧氏几何的平行公理不成立。从1799年起，他着手开发这一新几何内容，1813年已形成比较完整的思想。开始他把这种几何称为“反欧几里得几何”，以后又改为“星空几何”，最后才定名为“非欧几何”。1824年他在回答一位朋友托里努斯（非欧几何先驱之一）的信中说：“三角形内角和小于两直角，这个假设引导到特殊的与我们的几何完全不同的几何，这个几何完全是一贯的，并且我发展它本身，完全令人满意。”① 他不仅深信新几何在逻辑上的相容性，而且还确认它具有可应用性。可惜他并没有发表他这一开创性的见解。其原因用他自己的话说，“怕黄蜂围绕耳朵乱飞”，也就是怕惹起不必要的麻烦，受人嘲笑，甚至当别人提出这一问题时也没有表示公开支持。

高斯一生，性格内向，待人厚道，治学严谨。他所得出的结果，既要求严密、完美，又要求最大限度地简明，不叫人望而生畏。他恪守的原则是：“问题在思想上没有弄清之前决不动笔”，只有在证明的严密性和文字叙述的简明性各方面都达到无懈可击时才肯发表。高斯迟迟不肯发表自己关于非欧几何的重要成就，这是重要原因之一。

---

① 参见Б.И.科士青：《几何学基础》，商务印书馆1954年版，第36页。

高斯大学时代的同学、匈牙利的伏尔夫刚·波尔约曾经从事第5公设的证明，因为没有在这方面作出突出的成就，自认为浪费了一段时间。他的儿子约翰·波尔约又走上这一道路，并对这一问题着了迷。当他的父亲知道儿子在搞第5公设问题，赶紧写信劝阻。信上说："希望你放弃这个问题。对这样一个问题的害怕应该更多于感情上的迷恋，它会剥夺你生活中的一切时间、健康、休息和一切幸福。"①父亲的经验之谈并没有影响儿子的兴趣。约翰·波尔约所用的方法同萨开里差不多。正当父亲为儿子"浪费"时间、从事"无效劳动"而深感不安的时候，儿子却有了新的发现。1823年即约翰·波尔约21岁的那年，他写信给父亲说："我已从乌有中创造了整个世界。"②

1832年，父亲把儿子的成果作为附录附在自己一本几何著作之末，并把该书寄给高斯，请高斯评价。高斯回信说："如果我一开始便说我不能称赞约翰的工作，那你一定感到奇怪。但是我确实不能说别的话，因为称赞他等于称赞我自己。你的儿子所采用的方法和他所达到的结果几乎全部和我自己在30年前已开始的个人沉思相符合。……我自己的著作，虽然写好的仅是一小部分，我本来永远不愿意发表；……现在有了老友的儿子能够把它写下来，免得它与我一同湮殁，那是我最高兴没有了。"③高斯回信使约翰·波尔约大为失望，他认为高斯在利用自己的权威同他争夺发现的优先权，从此终止了这一问题的研究。

在约翰·波尔约《附录》出现的前三年即1829年，在俄国的《喀山通报》上刊登了题为《论几何学基础》的论文，作者是罗巴切夫斯基。

---

① 转引自B.N.科士青：《几何学基础》，第37页。

② 同上书，第38页。

③ 同上书，第38页。

罗巴切夫斯出身于小技术员家庭，三岁丧父，自幼家贫。1807年入喀山大学，1810年获硕士学位，1814年任该校副教授，1816年任教授，1827—1846年任校长。他从1815年开始研究第5公设问题。他起初也想直接证明，但很快就吸取了历史的经验，意识到不可能。1823年他用如下命题代替了第5公设："过已知线外一点至少可作两条直线和已知直线不相交。"于是发展出与欧氏几何不同的且在严格性和规模上同它一样的新几何。1826年他在喀山大学的数学物理系的学术讨论会上作了题为《关于几何原理的扼要叙述，及平行线定理的一个严格证明》的报告，1929年在《喀山通报》发表（即前面提到的《论几何学基础》），以后又有补充。由于还没有找到这种几何的实际应用，所以他把这种几何称为"想象的几何"，以后他又改称"泛几何"，今天称为"罗巴切夫斯基几何"（又称双曲几何）。

三位非欧几何的创始人在五年的时间（1855—1860）内先后去世，他们在世时并没有看到非欧几何被公认，更没有看到这一几何给数学思想产生的深刻影响。高斯由于谨慎，约翰·波尔约的《附录》由于在罗巴切夫斯基之后，且影响不大，所以没有受到公开指责。但由于非欧几何毕竟是超前发现，违反人们传统的认识，所以当罗巴切夫斯基的新见解发表以后，不可避免地引起当时人们的强烈反应：公开发表文章讽刺、嘲笑者有之，用匿名信谩骂、侮辱者有之，就是持最善良的宽容态度的人也认为他是一个有"错误的怪人"，并为之"惋惜"。高斯的谨慎与伽利略当年的"悔过"一样，是科学家在受压抑的时代实行自我保护、坚持科学事业的一种方式，不能苛求于他们。

3.非欧几何学的发展

非欧几何的产生，由于超越了时代而被人冷淡了近30年，直到19世纪中期，黎曼才在这一工作的基础上作出了重要突破。

黎曼1846年入哥廷根大学读神学和哲学，后来转学数学，

1851年获博士学位，1857年升副教授，1859年狄利克雷去世而继任其教授职位。他的一生虽然只有40年，但是却在数学的许多领域甚至物理学领域留下光辉的足迹，影响了19世纪后半期数学的发展。黎曼几何仅是他的成就之一。

罗巴切夫斯基几何的产生，说明了几何学绝非欧几里得几何学一种，高斯关于曲面内蕴几何的思想以及空间概念的推广等为黎曼几何的产生作了思想准备。1854年，黎曼在哥廷根大学发表了题为《论作为几何基础的假设》的报告，提出了黎曼几何的思想。报告认为几何学所研究的对象是一种“多重广延量”，其中的点可以用n个实数作为坐标来描述，为用抽象空间描述自然现象奠定了基础；他认为非欧几何也不仅仅是一种，而是一个广大而又丰富的领域。为了定义非欧几里得的黎曼空间，黎曼推广了曲面的高斯曲率，建立起黎曼空间曲率概念，这个概念是刻画欧氏空间和各种非欧空间之间差异的量度。

在一般的黎曼空间中，空间每一点的曲率是不同的，即黎曼空间是不均匀的。在特殊的情况下黎曼空间可以是均匀的，即具有恒常的曲率。恒常曲率的空间有三种类型：

(i) 零曲率空间，即欧几里得空间；

(ii) 负曲率空间，即罗巴切夫斯基空间；

(iii) 正曲率空间，即狭义的黎曼空间。

这样，欧氏几何和罗氏几何都成为更一般的黎曼几何的特例了。黎曼在报告中所阐述的几何思想极为深刻，是继高斯和罗巴切夫斯基之后几何思想的一次突破。据说在当时听报告的人中，除年迈的高斯外没有一个人听得懂。因为要消化、吸收这一思想需要有一定的时间，所以这一报告没有受到应有的评价。直到1868年，即他去世后的第二年，黎曼这一学说才正式公布。

黎曼之后，瑞士的克里斯托费尔和意大利的里奇等对黎曼几何又有发展。1915年，A. 爱因斯坦所创立的广义相对论真正地

用到黎曼几何。本世纪以来，受相对论的影响和推动，黎曼几何又有新的发展，产生了以更一般的曲线长度积分为基础的芬斯勒空间，以超曲面的面积积分为基础的嘉当空间，以二阶微分方程为基础的道路空间，还有K展空间等等，而这些通称一般空间，比黎曼空间概念更广。

罗巴切夫斯基几何与欧氏几何是空间形式的绝对真理的传统观念形成尖锐的矛盾，它是那样的不可理解，简直是“荒谬绝伦”。这同16世纪时哥白尼的日心说同地心说形成尖锐的矛盾、不可理解一样。在1868年即黎曼的几何思想公布的那一年，意大利的贝尔特拉米对其给出了一个解释。紧接着，1870年，德国的F. 克莱因也给出一个解释。之后法国的彭加勒又给出一个解释。这些解释使原来认为是悖理的非欧几何直观化，对它的普及和在数学中取得合法地位起了重要作用。

4.非欧几何学的意义

非欧几何的产生与发展，在客观上对研究了两千多年的第5公设作了总结：它是独立的公理，历史的实践表明，它不可能通过其它公理作出证明，因此它不可能取消，只能用它的等价命题代替。如果用它不同的否定命题代替，则产生不同的几何学。具体地说，第5公设最简的表述是：过已知直线外的任一点只能作一条直线同已知直线平行。它的否定命题有如下两种形式：

其一，过已知直线外的任一点可以作出一条以上的直线同已知直线平行。

其二，过已知直线外的任一点所作的任何一条直线都同已知线相交。

用第一种否定形式代替第5公设，则产生罗巴切夫斯基几何；用第二种否定形式代替第5公设，则产生狭义的黎曼几何。因此，它的创立，结束了欧几里得空间一统天下的时期，给数学开辟了研究各种空间的新时代，也是数学的发展由近代数学时期

向现代数学时期转折的重要标志之一。

在认识论上，非欧几何的产生也是数学从以直观为基础的时代进入以理性为基础的时代的重要标志。尽管它的内容同我们的直观那样的不协调，简直不合情理，但是它毕竟在逻辑上同欧氏几何一样，完美无缺，表明了数学的逻辑结构对于直观的相对独立性，也表明数学的逻辑推理可以独立于物理世界进行。在应用上，各种几何理论的建立，为自然科学的应用推出众多的可供选择的方案，结束了历史上“卖方市场”的单调局面，有力地促进了自然科学的发展，以非欧几何为数学工具的相对论和量子力学的产生与发展就是很好的例证。

非欧几何从它的先驱工作开始，到最后被公认，共计两百余年，清楚地说明了数学家并不是生活在真空之中，也自觉或不自觉地受当时居统治地位的哲学思想的影响。萨开里本来已经走上非欧几何的途径，但因他所得出的结果同他自己坚持的欧氏几何相悖而中途终断。作为数学巨人的高斯，尽管他目光敏锐，意识到它的实际意义，但仍不得不回避“离经叛道”之嫌，隐匿了自己珍贵的见解，致使本来可以早诞生数十年之非欧几何推迟了。在这一点上，罗巴切夫斯基的勇敢精神显得更加可贵。

有一些人认为，非欧几何的产生，是由于高斯等三人为了满足理智上的好奇和玩弄改变平行公理的数学游戏而创立的，所以这种形式的“创造”对数学的发展非常重要。按照这种认识，似乎纯粹理智上的好奇心是数学获得发展的推动力。事实上，非欧几何的历史并没有给这种观点以任何支持。首先，几何学中的公理是几何学赖以发展的基础，是逻辑演绎的起点，是反映物质空间中最基本的事实，因此，人们要求它应当是不证自明的真理。但是第 5 公设并不具备这一特点。正如前面所说，如果两条直线相交于非常遥远的地方时，就无法判断这两条直线是否相交或平行。因此，从欧几里得起，人们力图证明这一公理是自然的

事，这是一个严肃的数学课题，不是吹毛求疵。其次，非欧几何的创立者们也并不完全出于纯粹的“兴趣”或“钻牛角尖”。以高斯为例，他不仅是一个伟大的数学家，同时也是一个出色的天文学家，他长期担任哥廷根天文台台长。他曾正确地计算出一些行星的轨道，曾发现今天以他的名字命名的“高斯小行星”。为了验证非欧几何的实际意义，他曾实际测量过以三个山峰为顶点、三边长分别为数十公里和一百多公里的三角形①。由于仪器的精密度的关系，特别是高斯所认识到的，这个三角形还小，所以这次测量没有达到预期的结果。高斯绝不是凭心血来潮在搞数学游戏，这是肯定的。

非欧几何的产生，不仅使数学家大开眼界，引起一些重要数学分支的产生，而且迫使数学家改变了对数学性质的理解。因此，它的重要意义还在于使数学哲学的研究进入一个崭新的历史时期。比如，它的产生表明了欧氏几何并不是空间形式的唯一真理。从此开始，以往这种统一的观念消失了。面对非欧几何的挑战，在如何看待数学真理性这一问题上，数学家和哲学家提出不同的观点，长期争论，逐渐形成不同的数学真理论，如经验真理论、分析真理论以及条件真理论等等。其它方面的数学哲学问题，如数学的基础问题、数学本体论问题以及数学中的悖论问题等均与非欧几何有关（这些问题将在第四章介绍）。

2.7 微积分的奠基过程

1. 微积分基础问题的提出

微积分作为一门科学，是在初等数学成熟的基础上，在解决

---

① M.克莱因著《古今数学思想》第3册第289页上说，这个三角形的三边分别为69、85、197公里。这三个数据显然有误。

一系列具体问题的过程中，经过差不多两个世纪的时间里许多先驱者的工作，最后才由牛顿和莱布尼茨创立。它一产生，就显示出强大的生命力。牛顿和莱布尼茨以及他们的同时代人，应用这个方法解决了瞬时速度、极值、切线等问题以及这些问题的反问题——求积问题和求重心问题等。

早期的微积分因以无穷小为基础，所以这时的微积分称为“无穷小分析”。数学史上第一部以无穷小命名的著作是洛必达的《无穷小分析》(1696)。18世纪中期的欧拉对微积分的总结性著作是：《无穷小分析引论》(1748)、《微分学原理》(1755)、《积分学原理》(1768—1770)。欧拉和洛必达都曾是J.伯努里(1667—1748)的学生。究竟什么是无穷小？当时并没有一个清楚的定义，一般都是随着运算的进行，忽而是非零之数，忽而又是零，成了“招之即来，挥之即去”的怪物，因而以其为基础的微分学被人称之为“神秘的微积分”。今天所用的极限思想，在牛顿和莱布尼茨的晚期虽有端倪，但远没有取得支配的地位。他们二人的微积分，重点是建立新方法，只要能解决有关的具体问题，且行之有效，科学家们拿来就用。它的基本概念和逻辑困难问题，虽然已经提了出来，但在当时，既来不及解决，又无力解决，只好留给后世。正如达兰贝尔在1743年所说，当时人们“表现出更多关心的是扩大建筑，而不是在入口处张灯结彩；是把房子盖得更高些，而不是给基础补充适当的强度”①。随着新方法的确立以及它的广泛应用和日益深入，微积分的基础问题就更加尖锐地摆在人们面前，如果再不解决，不仅直接关系到微积分的存在问题，而且将影响到其它科学的发展。

从微积分诞生时起以及整个18世纪，在西欧各国的科学界和思想界开展了一场规模庞大的激烈争论，许多著名的科学家和哲

① M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第379页。

学家都发表了意见。争论把科学家分成两派：一派是牛顿和莱布尼茨的拥护者，另一派为其反对派。争论的焦点是牛顿和莱布尼茨的微积分能否进入数学殿堂的问题。“拥护派”虽然承认当时的微积分是数学，它有广泛的应用，但并不否认它还存在不足。“反对派”虽然强调当时微积分的缺点，但也并不否认它在自然科学中的应用。两派的争论，没有，也不可能取得一致的意见。不过争论的结果，使人们（特别是“拥护派”）认识到给微积分奠定基础的重要性和迫切性。

2．18世纪关于导数定义的三个方案

在18世纪，欧洲科学家围绕牛顿和莱布尼茨的微积分能否作为一门数学进行争论的同时，也注意到对牛顿和莱布尼茨的神秘方法的修改，大致同时，在英国和欧洲大陆提出了一些修正方案，主要有如下三个。

（1）达兰贝尔和欧拉的**理性微分学**。

达兰贝尔是法国百科全书派主要代表人之一，他和欧拉在无穷观和极限观上虽有某些差异（这里不去介绍），但是在求导数的方法上却是相同的。以求函数$y=x^3$的导数为例，把他们的方法用现在的符号叙述大致是：先设x有一个增量Δx（注意：$\Delta x \neq 0$），则y的增量是

$$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$$

再用Δx同除上式两边得出

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$$

至此，达兰贝尔再让$\Delta x=0$，这时左边变成$\frac{0}{0}$，用$\frac{dy}{dx}$或y'表示，而右边就剩下$3x^2$，即$y'=3x^2$。

达兰贝尔和欧拉的方法同牛顿和莱布尼茨的方法有某些不同。前者的Δx是非零的有限数，它在运算中起实在的作用；而

后者的Δx则带有神秘色彩。对此，马克思曾评价说："达兰贝尔脱下了微分学的神秘外衣，取得很大的进步。"① 但是达兰贝尔的方法同牛顿和莱布尼茨的方法都具有形而上学的色彩。因为两种方法都用所谓的"解脱法"——当x^3的导数$3x^2$出现在等式的右边后，再设法把$3x^2$从一些束缚中解脱出来(先除以Δx，再令$\Delta x=0$)，而不是用"演化法"。由于达兰贝尔并不是用变魔术的办法去掉一些不必要的项，相对于神秘的微分学来说，在逻辑上比较合理，所以马克思称达兰贝尔的微分学为"理性的微分学"。

(2) 以拉格朗日为代表的纯代数的微分学。

拉格朗日是法国18世纪享有盛誉的数学家，他既是法国数学界"三L"之一，也是天体力学"三杰"之一。在微积分基础问题上，他对牛顿和莱布尼茨的无穷小持怀疑态度，对正在萌芽中的极限思想也很冷淡，对达兰贝尔等的求导数方法也不满意。所以他力图寻找一个新的方法，并于1772年发表了题为《关于变量的求导与求积分计算的一种新类型》一文。该文提出了一个他认为能够避免批评的新方法：用泰勒级数作为微分学的基础。设函数为$f(x)$，则其泰勒级数为

$$f(x+h)=f(x)+p_1(x)h+p_2(x)\frac{h^2}{2!}+p_3(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots\cdots$$

拉格朗日把展开式中含有h的各项中的系数$p_1(x)$、$p_2(x)$、…分别定义为$f(x)$的一阶、二阶、……导数，即今之$f'(x)$、$f''(x)$等等。

这一方法曾得到当时相当多的人的赞同。拉格朗日也认为这个方法是"迄今所给出的最清楚的又是最简单的。如同我们所看到的，它既不依赖什么哲学上的理论基础，也不依赖于任何有关

① 马克思：《数学手稿》，第91页。

无限小或消失量的理论。”① 拉格朗日第一次用纯代数的方法定义了函数f(x)的各阶导数，并给出“导数”这个术语和它的符号f′(x)、y′。他使导数概念脱离牛顿的力学原型和莱布尼茨的几何原型而上升为数学概念，在这些方面拉格朗日是有历史功绩的。拉格朗日把微分学建立在初等代数的基础上，使微积分免于成为无源之水。因此，马克思称其微分学为“纯代数的微分学”。

但是拉格朗日的方法也有很大的缺陷。比如，它表面上虽然没有用到无穷小量和极限概念，而实际是一种假象。因为这一方法只适用于求多项式函数的各阶导数，而对非多项式函数（如 $\ln x$，$\sin x$等）要展开成泰勒级数，必须先求出各阶导数，不能完全依赖二项式定理。再如，用这种方法计算导数极不方便，一个复杂而又冗长的方法是不会有生命力的。所以拉格朗日的方法，当时使用的人很少。对此，人们的解释是，既然用这种方法比较麻烦，所以只要知道其合理性、有效性就行了。拉格朗日本人也持这种观点，在计算具体函数的导数时，为了简便，他也用无穷小法或极限法。也许由于拉格朗日当时的权威地位的缘故，一般人对这种方法采取敬而远之的态度：把它捧得高高的，而又离得远远的。

（3）约翰·兰登的代数的微分学。

约翰·兰登是18世纪末期英国数学家中一位代表性人物。在求导数问题上他走了一条全新的道路。他“不需要其它如拟想的运动和不可捉摸的无限小等辅助”。他的著作《残差分析》（1758）在当时极负盛名并且没有遭到反对。在求导问题上，该书用“一个残差除以另一个残差的商之值”代替流数或微分之商的计算。而他的残差就是形如 x_1-x、和 $f(x_1)-f(x)$ 的表达式。

---

① C.B.波耶：《微积分概念史》，第266页。

例如，要求x^3的导数，他先写出

$$\frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = x_1^2 + x_1 x + x^2$$

再取$x_1 = x$，就得到x^3的导数$3x^2$。

马克思对兰登的《残差分析》一书极为重视。他在《数学手稿》的一张研究微积分的书目中，列举了18世纪前后十多位著名数学家的微积分著作，唯独给《残差分析》一书打上了特殊的记号；他一再提到此书，数次提出要到博物馆去查阅该书。马克思对兰登的方法极为赞赏，认为它不仅优于牛顿和莱布尼茨的方法，而且也优于达兰贝尔和拉格朗日的方法，并把建立在这一方法基础上的微分学称为"代数的微分学"。马克思还揭示了兰登方法的辩证性：通过两次否定、三个阶段求出了导数。兰登的方法极为典型地体现了否定之否定这一辩证过程，容易被人接受。因此，这个方法在当时没有受到人们的反对是不奇怪的。

今天看来，用这种方法求函数的导数，虽然简单，可惜仅适用于多项式函数，而对一般的初等函数如超越函数或较复杂的复合函数，仍很不便，因而不能满足数学与自然科学的需要。

3.微积分的算术化

微积分的算术化，通常指以实数理论为基础建立的微积分的体系。在微积分的历史上，它是通过如下两个阶段来完成的。

第一，用严格的极限理论代替牛顿和莱布尼茨的无穷小方法以及上述三种方法。这一阶段从18世纪末期起，中间经酝酿、确立与完成三个时期，到19世纪中期止，前后将近一个世纪。

第二，极限理论离不开实数理论，而实数理论最终又离不开自然数。因此，实数理论的建立以及自然数的算术化的完成，就是微积分算术化即微积分奠基工作的完成。

上述三种微分学虽比牛顿和莱布尼茨的神秘的微分学有某些进步，但是都有自己的缺陷，所以没有获得数学界的公认。因

此，在18世纪末期，相当多的科学家干脆回复到牛顿和莱布尼茨的思想，其中以法国的政治活动家L.卡尔诺最为典型。卡尔诺在他的著作《关于无穷小微积分的哲学思想》（1797）中提出了所谓的“误差补偿论”。该理论实际是18世纪维护牛顿和莱布尼茨的微积分所有论点的汇集和系统化。从他的著作的名称来看，卡尔诺似乎偏重理论的探讨，但是全书的内容却偏重于应用；他对方法上的简便比对逻辑上的严格更加重视。他认为，用牛顿和莱布尼茨的无穷小方法，既能得出正确的结果而又有方法上的便利，因此，就没有必要在严格性的借口下而采用其它方法。卡尔诺的著作出版后影响很大，被译成欧洲多种文字，且一版再版。

为了鼓励人们给微积分奠定坚实的基础继续作出努力，在拉格朗日主持柏林科学院的数学学术活动期间，柏林科学院曾于1784年作出一项决议：奖励对这一问题作出重大贡献的数学家。获奖论文是西蒙·罗依里哀的《高等微积分原理的初探》(1787)。论文写道：“将古人称为穷竭法的方法，适当地加以发展，就足以肯定新微积分原理的真实性。”① 从1.4节对穷竭法的介绍可知，古希腊的穷竭法已具近代极限论的雏形。罗依里哀已敏锐地认识到，只有用极限理论定义微积分中的主要概念才能摆脱逻辑上的困境。为此，该文一反过去微积分的主流——微分是第一性的概念，通过微分定义导数，而明确提出以导数作为第一性的概念，再通过导数定义微分。他把导数定义为函数的增量同自变量的增量之比的极限；他一再强调，这个比是作为一个不能拆开的单一变数。这样，就成功地回避了神秘的无穷小和有争议的符号$\frac{0}{0}$。尽管罗依里哀的极限思想尚有不足之处（比如他只有单侧极限概念等），他的合理思想也没有受到当时人们重视，但是数学史表明，这个思想代表了微积分奠基的正确方向。

① 转引自C.B.波耶：《微积分概念史》，第268页。

继罗依里哀之后，法国的拉克鲁瓦在1797年出版了他的著作：《微积分论著》。这是当时很有影响的微积分专著。1802年他又出版了这一专著比较通俗的修订本：《微积分的初步论证》。该书被译成好几种文字，且一版再版，1881年出了法文第9版。这是一部试图用极限理论建立微积分体系的著作。当然，今天看来，该书还缺乏必要的严格性（比如，不注意级数的收敛就去求和，以及仍然使用有争议的符号$\frac{0}{0}$等）。但是它在欧洲大陆的广泛流传却使极限思想逐渐普及，为微积分的严格化作了准备。在英国，1816年出版了英译本。这一年在英国莱布尼茨的微积分符号取代了牛顿流数法的符号。1817年，波尔查诺的著作《关于方程在每两个给出相反结果的值之间，至少有一个实根的定理的纯粹解析的证明》发表，是用极限理论建立微积分体系的开端，也是微积分算术化的开始。

微积分所研究的函数是某个区间上的连续函数。什么是连续？在过去，人们仅停留于几何直观。波尔查诺第一次通过极限给出函数在某一区间上连续的定义，这个定义至今沿用。

波尔查诺关于导数的定义是：函数$f(x)$对任一个x值的导数$f'(x)$，是当Δx无论正地或负地趋向于零时，比值

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

所无限趋近或随我们的需要可以任意接近的量。这个定义在形式上虽同罗依里哀的导数定义相同，但波尔查诺已考虑到Δx趋近于零时的不同方向，所以更全面。

自微积分诞生以来，人们想当然地认为，只要函数在某一点连续，就可保证函数在该点有切线——导数存在。人们不自觉地在函数的连续性与可微性之间划了一个等号。但是1834年，波尔查诺用几何的形式给出了一个处处连续而又处处不可微的例子，

该例对微积分理论的发展很有意义。

如果说波尔查诺1817年的著作是微积分算术化的开始，那么微积分算术化的确立应归功于法国的柯西。

柯西的数学兴趣非常广泛，涉及当时数学各个领域。他的数学专著、文章据统计有800余种，他的全集现代版共27卷。其中关于微积分的著作主要有《分析教程》（1821）、《无穷小分析教程概论》（1823）和《微积分在几何学上的应用》（1826－1828）三本。柯西通过这几部著作，用极限理论确定了微积分的现代形式。

在柯西的有关著作中，不用几何直观，而是继承并发展了先辈们的算术化思想。他首先给出变量极限的定义：“若代表某变量的一串数值无限地趋向某一固定值时，其差可以随意小，则该固定值称为这一串数值的极限。”这是到那时为止极限概念最清楚的定义。其次，柯西把无穷小同变量联系在一起，并用极限定义无穷小。他的定义是：无穷小“是一个变量，其绝对值（能够）无限地减小而收敛于零”。对于无穷大，柯西将其看成无限地变大，其值可以超过任何给定常量的变量。柯西还给出高阶无穷小和高阶无穷大的定义。再次，柯西又通过极限给出导数定义（导数，柯西有时也称微分系数），他的定义与波尔查诺的定义完全一样，进而又通过导数定义函数的微分和高阶微分等。

在积分问题上，柯西继承并发展了古代原子论的思想：通过极限定义函数$f(x)$在区间$[x_0, X]$上的积分：假定函数$f(x)$在区间$[x_0, X]$上连续，并用分点x_1，x_2，x_3，…，$x_n = X$对其分割，则当$|x_i - x_{i-1}|$无限减小时，和式

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

的极限S就是$f(x)$在该区间上的积分。用今天的符号表示为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$$

柯西还给出了分段连续函数的积分和广义积分的定义。

德国的黎曼把柯西的积分定义发展成今天的形式。在柯西以前，对微积分基本定理仅限于直观理解，且无严格证明。柯西给出了精确表述和严格证明（这些，在下一节介绍）。

柯西用极限理论对牛顿和莱布尼茨的微积分进行了彻底的改造，这是一次重大的进步。但是柯西的体系仍有不少应当改进之处。比如，他没有一致收敛概念，因而有的定理无法证明，有的定理的证明不够严格；而且柯西有的判断后来证明是错误的。除此之外，更主要的是，柯西对建立微积分体系的主要概念——极限的叙述需要作进一步的解释。例如“越来越近”、“无限地减小”以及“无限地趋近”等，尽管文字生动，但毕竟不够精确，不是数学语言。对此作出重大改进的是稍后的外尔斯特拉斯。

外尔斯特拉斯是数学史上罕见的一位大器晚成的数学家。他在40岁之前一直任中学教员。在中学，他除教过数学、物理外，还教过德语、地理、作文和体育课等，是一位道地的“多面手”，且他与数学界没有什么接触。他41岁时受聘到柏林大学讲技术课，很快就升为该校教授。他勤奋刻苦，思想清晰，善于澄清数学中一些基本而又模糊的概念，他的名字几乎成了“严格推理”的代名词。外尔斯特拉斯虽然不像柯西那样有巨量之著作，一生很少以个人名义发表论文，但是他对数学特别是对分析学的贡献却是巨大的，被人称为“现代分析学之父”。

外尔斯特拉斯认为，柯西完全凭借直观的运动叙述极限概念并以其为微积分的基础并不真正严格。为了真正的严格，他提出了同已有的变量和极限的**动态**观点完全不同的**静态**观点，也就是把柯西关于极限的**定性**描述改造成**定量**的叙述。

从静态观点出发，他首先把变量x 解释成一个字母，该字母表

示数集中的一个数。接着给出了连续变量x的静态定义：如果对某数集中任一个x_0和一系列无论怎样小的δ_i，在区间（$x_0-\delta_i$，$x_0+\delta_i$）内总有该数集中另外的值，就称x为连续变量。他于1856年在柏林大学的一次讲演中首次提出了今天所谓的“$\varepsilon-\delta$”方法；接着用这一方法定义连续函数以及函数的极限，进而定义函数的导数和积分概念等，建立了微积分的严格体系，使该学科最终定型为今天的形式。

在连续和可微的关系问题上，他突破直观性的局限，并接受了波尔查诺的见解，于1861年讲课时首次以分析的形式给出了一个处处连续而又处处不可微的例子：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)$$

其中x为实变数，a是奇整数，$0<b<1$，$ab>1+\frac{3\pi}{2}$。从此以后，人们构造出更多的这类函数。这类函数的提出标志着人们对函数认识的深化，说明几何直观并不完全可靠和数学严格化的必要性。

微积分从产生到定型成今天的形式，经历了三个不同的阶段：以神秘的无穷小为基础的牛顿和莱布尼茨的阶段，以动态的极限概念为基础的柯西阶段和以静态的量的概念为基础的外尔斯特拉斯阶段。三个阶段之间既有内在联系，又有认识上的区别。通常所说的微积分算术化的完成是以外尔斯特拉斯的工作为标志。

4.实数理论的建立——微积分奠基工作的完成

随着微积分概念的精确化及其体系的严密化，建立实数理论的必要性与迫切性已经提上日程。否则建立在极限概念基础上的许多结果将成无源之水，一些重要的定理将无法证明。狄德金于1858年第一次讲授微积分时，已发现单调有界变量的极限存在定

理和介值定理无法严格证明，只能求助于直观图形。外尔斯特拉斯在1859年讲授函数论时也遇到同样情形，也只能用同样办法处理。此外，几何学和代数学的发展都要求有实数理论。

在实数理论中，无理数是最为关键的。它在古希腊时已被发现，并引起第一次数学危机。从那时到19世纪中期并无实质性进展，成为数学史上一个难点。什么是无理数？当时主要有如下两种定义方法。

一种是极限的方法。柯西在用极限概念为微积分奠定基础时，已注意到无理数的重要。他在《分析教程》一书中把无理数定义为有理序列的极限，即设s_n为有理序列，若$|s_n - s| < \varepsilon$，则s定义一个无理数。显然这个定义并不确切。因为有理序列的极限不一定是无理数。更重要的是，这个定义把s的存在性看作是已经证明过的结论或已定义过的概念来使用，因而陷入了逻辑循环。但是这一点柯西并没有意识到。

法国的梅雷及德国的康托尔对柯西定义作了如下修改：将$|s_n - s| < \varepsilon$改成$|s_{n+m} - s_n| < \varepsilon$，且对任意的正整数m $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_{n+m} - s_n) = 0$，则$s_n$定义一个实数。康托尔把这样的$s_n$称为基本序列。康托尔利用基本序列不仅定义了正数、负数和零，定义了两个实数小于、大于和相等关系，而且还证明了实数的完备性，即由实数构成的基本序列并不需要实数以外的数来充当它的极限。

另一种就是今天通用的方法。狄德金应用了今天以他的名字命名的“分划”定义了有理数和无理数，并把二者合称为实数。狄德金又在实数系内进行分划，结果发现，这样的分划并不产生新数，且同直线上点的分划完全一致，于是得出实数连续的结论。狄德金这一思想记载于他的《连续性和无理数》一书，而该书是1872年出版的，所以数学史认为，1872年是微积分基础完成的一年。

从牛顿和莱布尼茨起，经过整整两个世纪，许多数学家作出

了贡献。至此，微积分的奠基工作已经结束，它的现代形式已经形成。

2.8 微积分基本定理的历史

数学中一些重要定理和新理论的产生，大都经历了一个或长或短的酝酿、产生和推广的过程。这里介绍微积分基本定理的历史。

在现代一般的微积分教科书中，微积分基本定理是这样表述的：设函数f(x)在区间[a，b]上连续（图2.16），则对于该区间内的任意x，就有

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)。$$

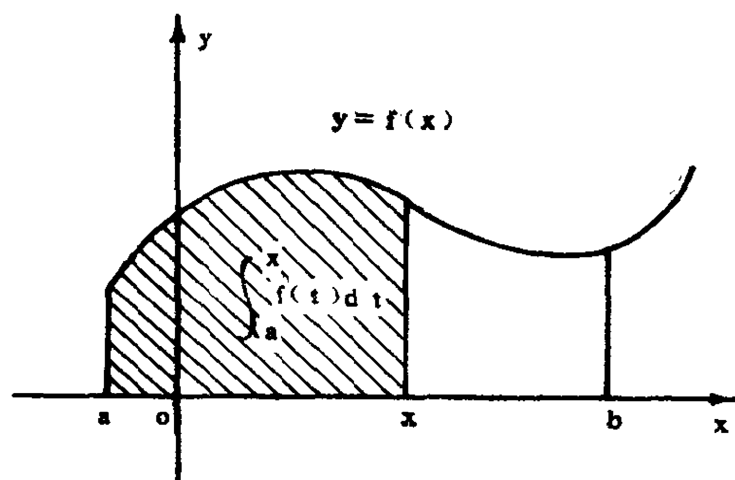


图 2.16

该定理表明：先对函数 f(x) 积分，再对其微分，结果仍等于f(x)。可见，这是揭露微分同积分互逆关系的定理；通过这一定理把微分和积分联结成为一个有机的整体——微积分。在数学发展的历史上，它的形成，被认为是微积分产生的标志；它的精确表述和严格证明，是微积分定型的重要标志；它的发展即勒贝格积分的提出，则是积分学的重大变革。

1. 基本定理的酝酿

早在中世纪时，某些经院哲学家对运动和变化曾进行过思辨式的研究。在英国，有“计算大师”之称的苏依塞斯，不仅有变量和极值的概念，而且还使用过术语“流数”和“流量”。这些术语已被三百年后的牛顿采用。法国的奥雷斯姆在他的《论图线》等著作中，已有变量、函数以及函数图形的思想。

文艺复兴开始以后大约两个世纪的时期内，是微分学和积分学平行而又独立地迅速发展的时期，是微积分作为一门学科的酝酿时期，也是微积分基本定理的酝酿时期。

在微积分的先驱们那里，第一，已经意识到求非匀速运动的路程、求已知曲线下的面积以及求曲线的弧长等问题有某种统一性——都是求无穷多个无穷小的总和；第二，也认识到求非匀速运动在给定时刻的速度、求曲线在一点的切线以及求变量的极值等问题也有某种统一性——都是求变量的变化率问题。比如，费尔马就把他用以求切线的方法用于求变量的极值等。当时，这两种方法分别称为“求积法”和“切线法”。

不仅如此，在托利拆里、J.格利高里以及费尔马等人的个别例子中已触及到切线法和求积法的互逆关系。一方面，他们已经知道一个沿直线作变速运动[$v=v(t)$]的质点所经过的距离可用“速度-时间曲线”（图2.17）下的面积表示。例如，当曲线为$v=t^n$时，其下的面积为$y=\frac{1}{n+1}t^{n+1}$。对此式，卡瓦列利已经验证当$n=1, 2, \cdots, 9$时都成立；帕斯卡和罗伯瓦猜想对任意的正整数也成立；瓦里斯又试图把n由正整数推广为分数。另一方面，同一运动也可以用“位置-时间曲线”（图2.18）表示。如果质点沿曲线$y=y(t)$运动，则它在t时刻的切线斜率就是该时刻的速度。例如，设t时经过的距离为

$$y=\frac{1}{n+1}t^{n+1},$$

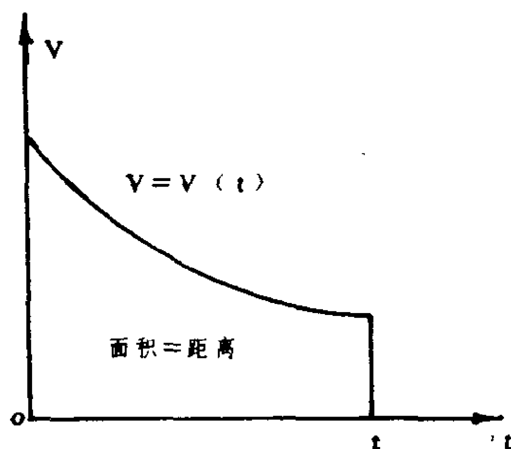


图 2.17 **速度-时间曲线**

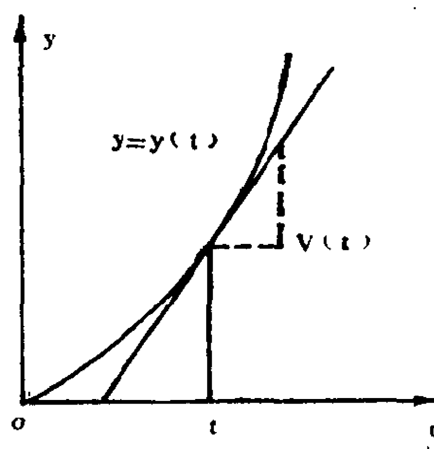


图 2.18 **位置-时间曲线**

则在t时刻的速度为$v = t^n$。

我们把上述两个问题中的时间t换成变量x就分别是:

第一，曲线$y = x^n$ 下的面积是$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$;

第二，曲线 $y = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$的切线斜率是x^n。

这两个问题之间的关系是:

$$x^n \underset{\text{(切线法)}}{\overset{\text{(求积法)}}{\rightleftarrows}} \frac{1}{n+1}x^{n+1}。$$

这两个问题本来是独立地考虑的，但通过上式表明：如果其中一个成立，则另一个必成立，即曲线$y = x^n$下面积的变化率仍为原来的x^n。这里已有微积分基本定理的雏形。可惜微积分的先驱们没有把这一思想明显地揭露出来，也没有认识到这一结论的重要性和普遍意义。

切线法与求积法的联系，也出现在一些微积分的先驱们对曲线弧长的计算中。最早提出这一算法的是英国一位名叫尼尔的青年。他于1657年计算半立方抛物线$y^2 = x^3$在区间[0，a]上的弧长S时，先把该区间分成n个小区间$[x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n$，$x_0 = 0$，$x_n = a)$，并用s_i表示曲线上相邻两个分点$(x_{i-1},$

y_{i-1}）和（x_i，y_i）之间的弧长（图2.19），当n相当大时，则有

$$S_i \approx [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

以及

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} [(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2]^{\frac{1}{2}},$$

为了计算S，尼尔引入抛物线 $Z = x^{\frac{1}{2}}$（图2.20）。他用 A_i 表示

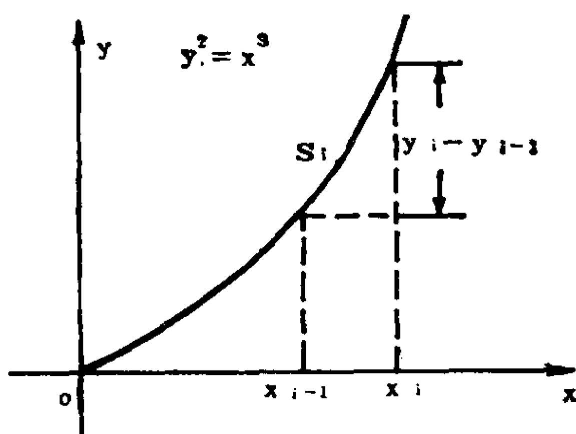


图 2.19

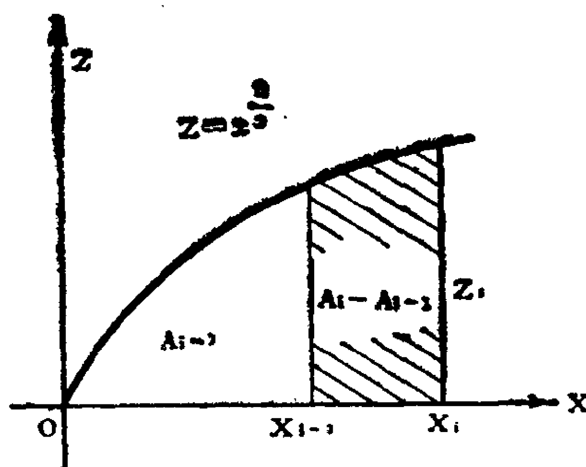


图 2.20

曲线 $Z = x^{\frac{1}{2}}$ 在区间[0，x_i]上的面积，再用当时已有的求积法得出：$\frac{3}{2}A_i = x_i^{\frac{3}{2}}$，于是

$$y_i - y_{i-1} = x_i^{\frac{3}{2}} - x_{i-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}(A_i - A_{i-1})。$$

尼尔将图2.20阴影部分的面积用矩形面积 $Z_i(x_i - x_{i-1})$ 代替，于是得出：

$$y_i - y_{i-1} \approx \frac{3}{2}Z_i(x_i - x_{i-1})。$$

再将此式代入求S的运算式中，尼尔经过计算得出：

$$S = \frac{1}{27}[(9a+4)^{\frac{3}{2}} - 8]。$$

这个结果是正确的。他能求出S的关键步骤是引入辅助曲线 $Z = x^{\frac{1}{2}}$ 以及用矩形面积 $Z_i(x_i - x_{i-1})$ 近似地代替 $y_i - y_{i-1}$。

把尼尔计算特殊曲线弧长的方法一般化就是今天求曲线 $y = f(x)$ 在区间[a，b]上的弧长S的公式：

$$S = \int^{b} \sqrt{1 + g^2(x)}\, dx 。$$

该公式表明，为了用求积法求出弧长S，必须先求出一个辅助曲线 $Z = g(x)$，使得它在区间[0，x_i]上的面积为 y_i，即

$$y_i = A_i = \int_0^{x_i} g(x)dx。$$

这时就有

$$y_i - y_{i-1} = A_i - A_{i-1} \approx g(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

即
$$g(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}。$$

再由图2.19中的“特征三角形”可知

$$S_i \approx \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$
$$\approx \sqrt{1 + g^2(x_i)}\,(x_i - x_{i-1})$$

因而就有

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} [1 + g^2(x_i)]^{\frac{1}{2}} (x_i - x_{i-1})。$$

这相当今天计算曲线弧长的公式：

$$S = \int_0^{t} \sqrt{1 + g^2(x)}dx。$$

式中的 $g(x)$ 就是今天的 $f'(x)$。求S是求积法，而由 $f(x)$ 求 $f'(x)$ 又是切线法。尼尔求特殊曲线弧长的方法是微积分早期切线法和求积法联系的一个实例。当然，联系并不明显；而且尼尔也没有明确指出所引入的 $g(x)$ 就是 $f'(x)$。

英国数学家巴罗在他的《光学和几何学讲义》（1669）一书

的第十讲的命题11中也有切线法和求积法联系的实例，这一命题用今天的符号表示就是：

$$\text{如果}\quad y=\int_0^x z\,dx,\qquad \text{则有}\quad dy=z\,dx。$$

巴罗的证明思想大致如下：

设$z=f(x)$是x的递增函数，且其下的面积为$y=A(x)$。为了在同一个图形上划出两条曲线，取z轴与y轴的正方向相反（图2.21）。在x轴上取横坐标为x的点D，并取T点使

$$DT=\frac{DF}{DE}=\frac{A(x)}{f(x)},$$

联结T和F，由于

$$\frac{DF}{DT}=\frac{A(x)}{A(x)/f(x)}$$

$$=f(x),$$

可见，TF就是曲线$y=A(x)$在x点的切线，它的斜率就是$f(x)$，即$y'=A'(x)=f(x)$。换一个写法就是$dy=z\,dx$。

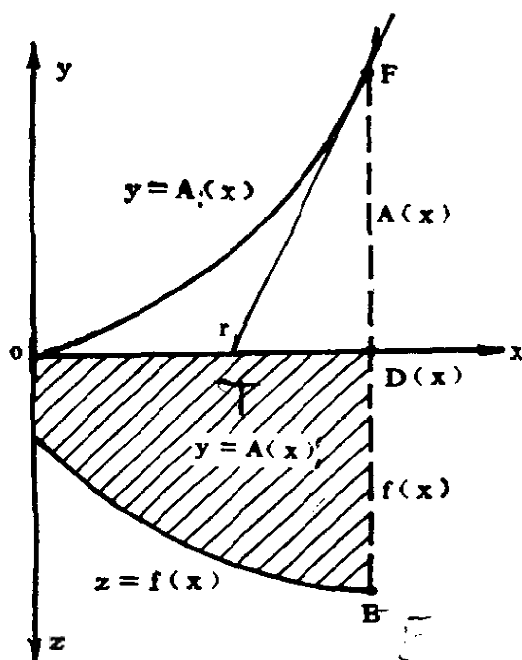


图 2.21

巴罗由假设$A(x)=\int_0^x f(x)dx$而推出$A'(x)=f(x)$，实际上已经具有微积分基本定理的思想。可惜巴罗的推导是纯几何的，并没有用刚刚出现的微积分计算，也没有定义$A'(x)$，所以不能认为这就是今天的微积分基本定理。一般认为，巴罗的叙述是牛顿和莱布尼茨之前这一定理的最好结果。

2.基本定理的形成

一定的量的积累必然导致质的突破。大约经过两个世纪的酝酿，微积分基本定理在牛顿和莱布尼茨的工作中才比较明确地提

了出来。

基本定理的思想，牛顿在1666年已有。他在1666年10月所写的《短论》一文中就讨论了如何借助反微分计算面积问题。他说，反微分“总能做出可以解决的一切问题”①。如果设曲线$y=f(x)$同x轴之间的面积为$A(x)$，牛顿断定$A'(x)$就是$f(x)$。这是微积分的历史上第一次用比较明确的形式提出的微积分基本定理。

牛顿在1669年写的《运用无穷多项方程的分析学》的著作中，一开始就提出计算曲线$y=ax^{\frac{m}{n}}$（a为常数，m、n为正整数）下的面积问题（图2.22）。他的作法大致是：设所求的面积为

$$Z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}},$$

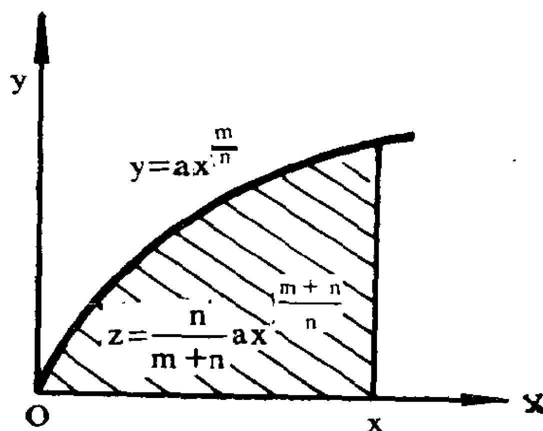


图 2.22

当x的增量为o时，对应的面积为

$$\frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}。$$

牛顿用他的二项式定理先展开$\frac{n}{m+n}a(x+o)^{\frac{m+n}{n}}$，然后从展开

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，第261页。

式中减去原面积$\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$，再将所得结果除以“o”，最后舍去含有o的各项得出原曲线$ax^{\frac{m}{n}}$。牛顿在这里所用的方法本质上是先驱们（如费尔马等）的方法，即切线法。但牛顿用了二项式定理，大大地简化了计算手续。既然对面积Z用切线法得出了曲线$y=ax^{\frac{m}{n}}$，牛顿就断定说：“反过来，如果曲线为$y=ax^{\frac{m}{n}}$，则（其下的）面积为$Z=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$。”① 这样，就把求曲线$y=ax^{\frac{m}{n}}$下的面积问题变成了求函数$Z=ax^{\frac{m+n}{n}}$的函数值的问题，极大地简化了繁重的求积运算。

牛顿意识到用反微分法代替求积法的重要性和普遍性，所以他强调了这个方法既可以“直接用”，也可以“反过来(用)”。所谓“直接用”，就是切线法，即今天的由$F(x)$求它的导数$F'(x)$；所谓“反过来（用)”，就是积分法，即今天的由$f(x)$求$F(x)$，使得$F'(x)=f(x)$。牛顿这一思想用今天的符号表示就是微积分基本定理：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),$$

今天看来，牛顿这一思想是非常明确的。但是他的这一精辟的见解基于比较简单的事实，而不是现代意义下的严格证明。因为：第一，他的“直接用”仅仅给出由$F(x)$求$F'(x)$的方法和步骤，而方法本身缺乏数学应有的逻辑严格性，这主要是他的符号“o”到底是零还是非零的问题；第二，他的“反过来（用)”仅限于多项式函数，而对一般的函数尚未涉及；第三，牛顿由$f(x)$求$F(x)$总是略去“积分常数”，即所取的一切曲线都通过

① 参见J.F.斯科特：《数学史》，第199—200页。

原点，这一点也缺乏普遍性。

莱布尼茨也是微积分奠基人之一。他的微积分思想最早记述在他的一本没有发表的《数学笔记》之中，全书大约100页。这是他从1673年起研究了格利高里、费尔马、帕斯加、笛卡尔和巴罗等人的有关著作后陆续写的札记，很不系统，前后所用的符号也不一致。虽然零乱，但却包含了莱布尼茨的微积分思想，其中也有微积分基本定理的思想。

莱布尼茨的积分完全继承了先驱们求微元和的思想。他在1673年的笔记中，在假定y＝x的条件下，利用几何的直观，经舍弃无穷小后得出如下结果

$$\int y\,dy=\frac{1}{2}y^2。$$

他也认识到切线法和积分法之间的互逆关系以及这一关系的重要性。比如，他在1675年10月29日的笔记中说："给定dy及其与x的关系，试求$\int dy$。这可由逆运算而得到，也就是说，假设$\int dy=ay$，令$dy=d(ay)$，这时，正如$\int$会增加维数一样，d将减少维数。但是，$\int$意味着和，d意味着差。由给定的y，我们总可以求出dy（及）相继两y之差。因此，一个等式变换为另一个等式。"① （积分符号$\int$是在这篇札记中首次出现的，并在1686年的一篇题目很长的论文中公开使用。）这段话表述得虽不十分清楚，但他清楚地说出了"$\int$会增加维数，d将减少维数"，而且"$\int$意味着和，d意味着差"。我们从"增加"与"减少"、

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，第342—343页（为了方便，这里将原文中的L改为dy）。

“和”与“差”的关系中可以看出莱布尼茨已经明确$\int$与 d 是互逆关系。这是莱布尼茨独立地具有微积分基本定理思想的标志。

莱布尼茨在1677年所写的一段札记中，通过“微分三角形”不仅得到联系微分和积分的求曲线弧长S的公式，即

$$S=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

而且还得出曲线$y=f(x)$之下的面积公式：$\int y\,dx$ 。他是怎样得出这个公式的呢？他说：“我把一个图形的面积表示为由纵坐标和横坐标之差构成的所有矩形之和（图2.23），即 $B_1D_1+B_2D_2+B_3D_3+\cdots$。因为微分三角形$C_1D_1C_2$、$C_2D_2C_3$等等与这些矩形相比为无穷小，可以忽略不计，所以在我的微积分中图形面积用$\int y\,dy$（表示），即由每一个 y 和相应的 dx 构成的这些矩形表示。”①

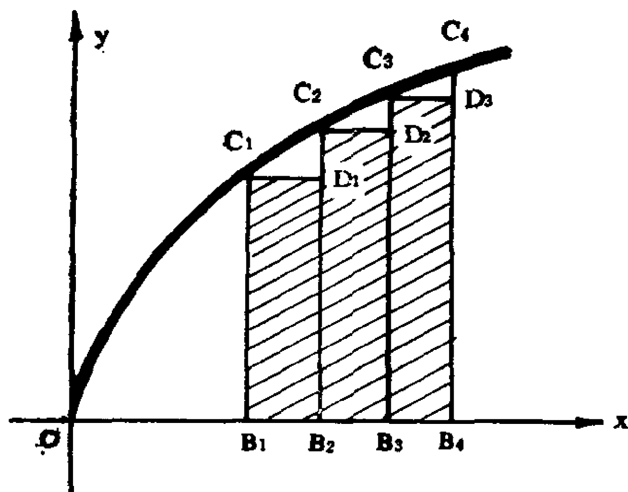


图 2.23

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，第317页。

莱布尼茨在他的积分思想和$\int$与d互逆思想的基础上进一步说，"现在我们更进一步，为了得到一个图形的面积，可以通过求它的割圆曲线来进行。"①他所说的割圆曲线，从上下文来看，实际上就是面积函数（即今天的原函数）所表示的曲线。莱布尼茨具体作法大致如下：

设给定的曲线是$Z=f(x)$，为了求出该曲线在区间[a，b]上的面积$\int Zdx$，必须求出另一条纵坐标为y的曲线，即他所谓的割圆曲线，使得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Z}{a},$$

式中a是常数（添加a的目的可能是为了使两边的维数一致，在具体计算时，他常设a＝1）。这时由于$Zdx=ady$，于是就有

$$\int Zdx=a\int dy=ay。$$

莱布尼茨通常假定曲线y经过原点（这一点同牛顿一样），于是在莱布尼茨的微积分中，求积问题就化归为反切线问题。也就是说，为了求得纵坐标为Z的曲线下的面积$\int Zdx$，只须求出一条纵坐标为y的曲线，使得它的切线满足条件

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Z}{a}。$$

设a＝1，再由曲线$Z=f(x)$在区间[o，b]上的面积减去在区间[o，a]上的面积，就得出公式

$$\int_a^b f(x)dx=y(b)-y(a)。$$

在今天的微积分教科书中，常把上式称为"牛顿-莱布尼茨公

---

① 转引自C.H.爱德华：《微积分发展史》，第348页。

式”。顺便指出，用符号$\int_a^b f(x)dx$表示曲线$Z=f(x)$在区间$[a, b]$上的面积是后来的傅利叶首次使用的。

3.基本定理的精确表述和证明

作为表述切线法与求积法（即微分与积分）互逆关系的基本定理，自然离不开微分和积分思想。微分思想从16世纪微积分的先驱们起，直到19世纪上半期止，并没有什么变化。整个18世纪，人们的注意力虽然集中于微分学基础的研究，但其重点是如何解释无穷小的“神秘性”问题。19世纪初期，柯西用极限论改造了已有的微分学，才结束了牛顿-莱布尼茨微分学的神秘性。

但是积分思想却几经变化。从古代原子论到莱布尼茨，人们一般都把积分作为求微元之和。然而，从牛顿开始，其间经过约翰·伯努里、欧拉直到波尔查诺，占主导地位的是把求积问题看成切线问题的反问题。因此，只要求切线的问题解决了，它的反问题就是求积问题。这也是18世纪人们集中注意力讨论微分学基础问题的原因。可是到了柯西那里又发生了变化。柯西继承并发展了积分作为微元和的思想，并用极限理论定义积分。

柯西在他的《无穷小分析教程概论》一书的第二十一章中，叙述了他的积分思想。这一思想大致如下：

设函数$f(x)$在区间$[x_0, X]$上连续，并用分点x_i（$i=1, 2, 3, \cdots, x_n=X$）对其分割，于是和式

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

表示以$f(x_{i-1})$为高、以(x_i-x_{i-1})为底的n个矩形面积之和。他说：“重要的是要看到：如果这些元素（按：子区间）的数值（按：子区间的长度）变得很小，而数n变得很大，则划分的方

式对S（按：面积）值影响甚微。”① 也就是说，当 n 很大、且 $x_i - x_{i-1}$很小时，和式S_n就同该曲线在区间[x_0，X] 上的面积S近似，即

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})。$$

柯西在他的另一部著作《分析教程》中，用算术的方法证明了在同一区间[x_0，X]上进行不同的划分，只要“这些元素的数值变得很小，而数n变得很大”，则“S的值变化也很小”。他写道：“当差$X - x_0$的元素无限减小时，划分方式对S的值没有显著影响；如果我们使这些元素的数值无限减小，使它们的个数无限增加，那么S的值最终就成为一个常数，换句话说，它最终到达某一个极限，这个极限仅仅依赖于函数f(x)的形式以及变量x的两个端值x_0和X，我们把这个极限称为（f(x)在区间[x_0，X]上的）定积分。”② 把柯西的这一思想用符号表示就是

$$S = \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ x_i - x_{i-1}\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})。$$

当柯西定义了闭区间上连续函数的定积分之后，又把这一定义应用到分段连续函数。即设f(x)在区间[x_0，X]上有n个有限间断点 x_i（i=1，2，3，…，n），则 f(x) 在该区间上的定积分定义为

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx。$$

此外，柯西还定义了广义积分，且同现在教科书的叙述基本一致，在此不再赘述。

---

① C.H.爱德华：《微积分发展史》，第434页。

② 同上书，第436页。

下面简略地叙述一下黎曼对柯西积分思想的改造。1854年，黎曼在他的论文《用三角级数的方法表示函数的可能性》中，研究了更为广泛的一类函数的可积性问题。他把积分概念推广到在区间[a，b]上有定义、且有界的函数。因其不要求连续或分段连续，所以比柯西所处理的函数更为广泛。他把区间[a，b]以任意的方式划分为n个子区间 $\Delta x_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$，它们的长度也分别用$\Delta x_i$表示；并设$x_i$为$\Delta x_i$上的任一点，于是得到和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i。$$

黎曼证明了不管如何划分，也不管x_i如何选取，和式的极限

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathrm{Max}\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

都存在，这个极限就是函数f(x)在区间[a，b]上的定积分，用傅利叶的符号记为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \mathrm{Max}\,\Delta x_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i。$$

这是现在微积分教科书中通用的定义。在形式上，黎曼定义显然是用子区间上的任意点代替柯西定义中同一区间上的左端点而来的。

柯西和黎曼的工作对微积分的发展很有意义。第一，在柯西以前，积分常常作为面积（或距离）理解，没有脱离几何（或力学）直观，而什么是面积？一般作为一个自明的概念，没有认识到给出一个精确定义的必要性。第二，同面积有关的函数概念，一般采用欧拉的定义——函数就是一个解析表达式。但自傅立叶揭示出函数的本质、并给出函数一般定义之后，就暴露出18世纪

时积分概念的狭隘性。傅立叶的函数定义对18世纪积分思想是一个极大的冲击。柯西和黎曼的积分定义对这两点作了满意的解决。

柯西和黎曼由于没有一致连续概念，也没有实数连续性理论，所以他们关于积分存在性的证明并不真正严格。但是如果补充上这两点，他们的证明就与现代的证明一样。闭区间上连续函数的一致连续性是19世纪70年代初期由外尔斯特拉斯证明的；实数的连续性理论也是19世纪70年代由狄德金等人建立的。

当柯西在《无穷小分析教程概论》一书中叙述了积分定义之后，他又在该书的第二十六章中精确地叙述了微积分基本定理。他的思想大致如下：

设$f(x)$是区间$[x_0, X]$上的连续函数，且$x \in [x_0, X]$，则$\int_{x_0}^{x} f(x)dx$定义一个新函数$F(x)$，柯西证明了$F(x)$的导数就是已给的$f(x)$。即当

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx\text{时，} F'(x)=f(x)。$$

今天教科书的证明沿用了柯西的证明；在表述方面，仅仅是对柯西和黎曼的表述作了一点微小的变动，这就是把柯西的$f(x)dx$换成$f(t)dt$，于是就有

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt=f(x)。$$

柯西经简单的推导，还把这个公式变为另一个常用的形式：

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

这里$F'(x)=f(x)$。

柯西在其工作中，只是用函数、函数的导数和函数的积分概念来论证微分与积分的互逆关系，相对于牛顿和莱布尼茨的直观

表述来说是一次重大的进展。

4.基本定理的发展

上面已经谈到黎曼用Δx_i上任一点代替柯西的Δx_i的左端点，这样的积分今天称为“黎曼积分”。当黎曼给出积分定义后，他进一步提出了如下的任务：“让我们来确定这个概念的适用范围，并且试问在什么情况下函数是可积的，在什么情况下是不可积的？”他经过研究指出，**有界**函数f(x)在区间[a，b]上可积的必要充分条件是

$$\lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} D_i \delta_i = 0。$$

式中δ_i是子区间Δx_i的长度，D_i是f(x)在Δx_i上的振幅（最大值与最小值之差）。

19世纪70年代，人们对区间[a，b]上的**有界**函数f(x)引入“黎曼大和”与“黎曼小和”概念（今天也称为“达布和”），即对于一个分划P来说，黎曼大和与黎曼小和分别定义为

$$U(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad 和 \quad L(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i。$$

式中M_i与m_i分别表示函数在Δx_i上的最大值与最小值。

80年代，伏尔泰拉在黎曼大和与小和的基础上给出“上积分”与“下积分”定义，把它们用符号表示就是

$$U = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i;$$

$$L = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i。$$

紧接着，皮亚诺又把上、下积分分别定义为对于区间[a，b]上一切划分的黎曼大和与小和的最小上界与最大下界，并且指出，

仅当上、下积分相等时，f(x)才是黎曼可积的，否则f(x)就不是黎曼可积的。例如，对于狄利赫勒函数D(x)来说，由于

$$\underline{\int_0^1} D(x)dx = 0, \qquad \overline{\int_0^1} D(x)dx = 1,$$

故D(x)不是黎曼可积函数。

我们看到，表示微分同积分互逆关系的微积分基本定理

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (A)$$

也可以用另一种形式表示：

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)。 \qquad (B)$$

在柯西的积分理论中，因为只限于光滑的曲线，所以无论是（A）式还是（B）式都是适用的。然而，由于黎曼的积分理论是把在区间[a，b]上的连续函数发展为在区间[a，b]上有定义且有界的函数，所以使（A）、（B）二式失去了意义。因为（A）式只有当f(x)在[a，b]上连续时才成立，否则不成立；而（B）式当f′(x)不是黎曼可积时也失去作用。特别自黎曼积分产生以后，大量的所谓“病态函数”的出现（比如，前面提到的处处连续而又处处不可微的例子就是较早的一个），对已有的积分理论是一个很大的冲击。因为对这类函数来说，（A）与（B）式已不适用。法国著名数学家彭加勒在评论“病态函数”的作用时说：“过去人们为了一个实际的目的而创造一个新的函数；今天人们为了说明先辈在推理方面的不足而故意制造出这些函数来，而从这些函数所能推导出来的也就是仅此而已。”① 实际上并不“仅此而已”。作为一种数学理论，必然要求它在理

① 转引自张奠宙、赵斌：《20世纪数学史话》，知识出版社1984年版，第12页。

论上的完备性和逻辑上的严格性。为了使（A）、（B）二式能覆盖已经发现的更为广泛的函数，必须突破柯西和黎曼的积分思想，提出新的积分思想，这种新的积分就是"勒贝格积分"。

法国的勒贝格在他的"博士论文"（《积分、长度与面积》，1902）中提出了今天以他的名字命名的积分，并在其著作（《关于积分法和原函数研究的讲义》，1904）中作了发展。勒贝格不像柯西和黎曼那样，对函数的**定义域**进行划分，而是走了一条全新的道路——对函数的**值域**进行划分，表现了他对求积问题更为深刻的理解。

关于黎曼积分同勒贝格积分的区别，有人曾作了一个比喻：设有大量不同票面值的纸币，要计算其总值有两种方法：一种是逐张相加；另一种是先将其按不同的票面值分类，再将每一类的张数乘以该类中一张的票面值，然后再把每一类所得的数相加。黎曼积分相当于第一种方法，而勒贝格积分相当于第二种方法。勒贝格积分表明，它能处理更为广泛的一类函数。如果$f(x)$在$[a, b]$上是黎曼可积的，则也是勒贝格可积的，且二者结果相等。但是不能反过来。例如，狄利赫勒函数是勒贝格可积的，然而它不是黎曼可积的。

勒贝格根据他的积分思想曾经证明了如下两个同微积分基本定理有关的命题：

命题1. 设函数f在区间$[a, b]$上有界、可测，定义

$$F(x)=\int^{x} f(t)dt,$$

则存在一个测度为零的集合$E\subset[a, b]$，能使对于一切不属于E的x，等式

$$F'(x)=f(x) \tag{A}$$

几乎处处成立。

命题2. 设函数f在区间$[a, b]$上是可微的，f'在该区间上是

有界的，则f'是勒贝格可积的，且

$$\int_{a}^{b} f'(x)dx = f(b) - f(a)。\qquad (B)$$

这两个命题表明，对于更广泛的一类函数来说，微分同勒贝格积分之间是互逆运算，即：如果f是区间$[a, b]$上的有界可测函数，则最多除了一个测度为零的集合外，(A)式成立；如果f是有界可测函数，f'在$[a, b]$上存在且有界，则(B)成立。

微积分基本定理的两种形式(A)与(B)，经过长时期的酝酿后，最早被牛顿和莱布尼茨在直观的基础上发现并应用；柯西使其脱离几何和力学直观，给于精确的表述，并在$f(x)$连续的条件下给予证明；勒贝格积分则使这一定理可以应用于更为广泛的一类函数。

第三章　现代部分(一)——若干数学分支思想略窥

3.1　康托尔的集合论

1.集合论的产生

集合论是关于无穷集合与超穷数的数学。它的基本概念已经渗透到现代数学的所有领域及某些自然科学领域，成为现代数学的基础（范畴论除外）。它产生的背景是数学分析特别是三角级数发展的需要，与康托尔的名字是分不开的。

康托尔1845年出生于俄国的圣彼得堡，其父是迁居俄国的丹麦商人，他11岁随父母移居德国的法兰克福，1863年入柏林大学，从学于库默尔、外尔斯特拉斯与克隆尼克。1867年，在库默尔的指导下以数论方面的论文获博士学位。1869年任哈雷大学讲师，1872年任副教授，1879年任教授，1904年获英国皇家学会希尔维斯特奖，1918年病逝于哈雷。

康托尔在上大学期间主修数论，因受外尔斯特拉斯的影响，对数学推导的严格性和数学分析发生兴趣。他在哈雷大学的同事、师长、教授海涅建议他研究函数论中的“唯一性问题”。他接受了这一建议，并放弃了他所喜爱的数论方面的课题。

自从傅立叶在他的名著《热的解析理论》（1822）中提出“任意”函数（实际上要满足一定的条件，例如分段单调）都可以展开成三角级数的论断以后，由于没有给出明确的条件和严格的证明，引起数学界的广泛注意。1854年，黎曼在他的《论用三角级数表示函数的可能性》一文中明确提出所谓“唯一性问题”。

例如，当一个以2π为周期的函数$f(x)$在$(0, 2\pi)$上表示成三角级数

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \cdots$$

时，人们自然会问：这个表示式是否是唯一的？黎曼并没有给予回答。海涅1870年证明：当$f(x)$连续，且它的三角级数一致收敛时，展开式是唯一的。康托尔自接受海涅的建议后，于1870、1871、1872年连续发表三篇论文。1872年的论文除了用相当的篇幅叙述以基本序列定义无理数的实数理论并提出“狄德金-康托尔公理”以外，已将海涅提出的$f(x)$连续的条件减弱为$f(x)$具有无穷多个间断点的情况，还定义了“导集”概念，并以导集的性质为准则对无穷集进行了分类，使无穷点集成为数学的研究对象。1874年，他在《关于一切实代数数的一个性质》一文中，又提出“可数集”的概念，并用一一对应原则对无穷集合进行分类，证明了如下重要结果：（1）一切代数数是可数的；（2）任何有限线段上的实数是不可数的；（3）超越数是不可数的；（4）一切无穷集并非都是可数的，无穷集同有穷集一样也有数量（基数）的区别等。这篇论文标志着朴素集合论的诞生。

当康托尔证明了自然数集同实数集是两个基数不同的无穷集之后，自然地想到是否还有更大的无穷问题。他曾猜想平面上点集的基数可能大于实数集的基数，进而n维空间点集的基数大于$n-1$维空间点集的基数。从1874年起他就思索这个问题。经过三年的时间，终于得到同他原来的猜想完全不同的结果。他证明：$n(\geqslant 2)$维空间的点能同直线上的点集一一对应。1877年，他在给狄德金的一封信中说：“我见到了，但我不相信。”关于这一成果的论文1878年发表后，吸引人们研究度量空间维数概念的本质，很快出现了一批论文。这些论文用不同的方法证明：决定空间维数的，不仅仅是独立变量的个数，还有其它一些连续映

射变换下不变的性质，所以这批论文标志集合拓朴思想的产生。

既然n维空间的点集不是更大的无穷，进一步的问题是：有没有更大的无穷？若有是什么？它们是如何构成的？康托尔开始研究这个问题，并先后用两种方法构造出更大的无穷。

从1879到1884年，康托尔共发表总标题为《关于无穷线性点集》的论文6篇，每一篇都有一些新成果。其中第5篇发表于1883年，它的篇幅最长，内容也最丰富。这篇论文的主要内容是：超穷序数及其同自然数的关系，超穷序数的分类同超穷基数的关系，良序定理（每一集合都能被良序，但没有证明），良序集和超穷算术，超穷序数的质因子分解和实数集的结构等。在这篇论文中，他以公理的形式提出构成超穷序数的三个原则（延续原则、穷竭原则和限制原则），遵循这三个原则和他的序数理论，他构造了基数依次为$\aleph_0$、$\aleph_1$、$\aleph_2$、…的超穷集。康托尔认为："为了科学的发展，引入一个这种无穷的新数对于研究是需要的或者是不可少的。"① 这篇论文从内容到叙述方式都同现代朴素集合论基本一致，所以该文标志了点集论体系的建立。

1891年，康托尔在向全德数学联合会提交的论文《集合论的一个根本问题》一文中，又用集合的幂集构成一个比一个大的无穷。他还用著名的"对角线方法"证明了如下两个重要结论：（1）实数的不可数性，并据此得出任意可数集的幂集都不可数，以及没有最大基数的结论；（2）定义在区间〔0，1〕上的实函数f(x)的集合的基数（记为f）大于实数集合的基数（记为c），即$f>c$。

1899年，康托尔在给狄德金的信中，把1891年论文中的思想

① 转引自王宪钧：《数理逻辑引论》，北京大学出版社1982年版，第275页。

表述成：一集合的一切子集所构成的集合（即该集合的幂集）的基数大于原集合的基数。这就是今天的“康托尔定理”。据此，康托尔构造了基数依次为$\aleph_0$、$2^{\aleph_0}=c$，$2^c=f$、…的超穷集。

至此，康托尔已用两种方法构成了如下两个基数序列：

$$\aleph_0、\aleph_1、\aleph_2，\cdots\cdots;$$

$$\aleph_0、2^{\aleph_0}=c、2^c=f、\cdots\cdots。$$

其中$\aleph_0$是可数无穷集即最小无穷集的基数，$\aleph_1$是最小不可数集的基数，c为实数集的基数。那么，等式$\aleph_1=c$是否成立？即实数集是否是最小的不可数集？亦即在$\aleph_0$与c之间是否还有基数为不可数的无穷集？这是集合论中著名的连续统假设。1900年，希尔伯特在巴黎举行的国际数学家大会上，把这一问题列为未解决的23个问题的第一个。至今该问题虽有重大的进展，但并没有完满解决。

2.集合论的公理化

集合论实际上是关于无穷的数学。无穷概念既是哲学和天文学的重要课题，又是数学的重要课题。数学中的无穷包括无穷过程、无穷大、无穷小、无穷集合、无穷序数和无穷基数。其中无穷过程、无穷大和无穷小均起源于古代人们的直观，它们渗入数学后，通过人们的思维“加工”，形成了数学中的潜无穷与实无穷概念。无穷集合、无穷序数和无穷基数，则是在数学相当发展的基础上再次抽象而成的数学概念，均属实无穷范畴。数学中无穷的历史实际是潜无穷与实无穷在数学中合理性的历史；在19世纪以前，也是此长彼消、“各领风骚数百年”的历史。数学分析的产生、发展和定型成今天的形式，由于极限理论的应用，使潜无穷在数学中站住了脚。但是实无穷进入数学殿堂的历史却几经曲折、可谓“时运不济，命途多舛”。在康托尔以前，由于实无穷产生悖论，引起数学危机，所以使其信誉扫地。

实际上，潜无穷与实无穷是一对孪生兄弟。承认潜无穷的逻辑结果必须承认实无穷，因为变数要取无穷多个值，必须有一个从其中取值的实无穷集合。康托尔用大量的事实论证了包括微积分在内的数学要取得进展，必须肯定实无穷。比如：一切正整数、任一闭区间上的实数、圆周上的点以及圆内的点等均为实无穷。康托尔以极大的勇气，将超穷基数和超穷序数等实无穷引入数学，建立了他的集合论。尽管康托尔的工作受到他的老师克隆尼克等的强烈反对，斥责他对实无穷的研究是“浪费时间”，是“毫无意义”的，并说他的集合论不是数学而是神秘主义等。但由于把它应用于分析、拓扑和测度论而取得重要的成功，所以逐渐得到更多的人的肯定。但是好事多磨，集合论的好景不长：1990年前后出现了好几个悖论，特别是罗素悖论的产生，对西方数学界震动很大，产生了所谓的第三次数学危机。

数学第三次危机把实无穷在数学中的合理性问题再次提上日程。不同的数学家从各自对数学的理解出发对实无穷采取了不同的立场。以布劳维尔和H.外尔为代表的直觉主义者持潜无穷立场，否认实无穷，反对康托尔的超穷集合。希尔伯特对实无穷在数学中应用也感到担心，但他出于方法论的考虑，认为可以把实无穷作为“理想元素”加入到数学中去，只要不因它的加入而导致错误就行。现代形式主义者认为实无穷只是一种虚构，它们在客观上是不存在的。以贝尔纳斯为代表的柏拉图主义者则从数学概念的实在论出发，承认实无穷的客观性以及在数学中的合理性。不同学派关于无穷观的分歧现在依然存在。如果说因实无穷在数学历史上屡次应用而出现悖论被视为禁区的话，那么现在禁区已经开放，但却仍是现代数学基础研究中的一个热点。

康托尔的集合论受到非难，并不单纯是因哲学观点和数学思想上的分歧，更主要的是它产生了许多悖论。这些悖论，特别是只涉及“集合”和“属于”两个概念的罗素悖论的出现，说明集

合论本身并不协调，还需要发展。所以本世纪以来，人们提出种种公理系统使其公理化，比如：奎因系统、王浩系统、阿克曼系统、莫利和斯科特系统等等。其中主要的是如下两个公理系统。

ZF公理系统。这是1908年由德国策梅罗提出的公理化方案，后经斯科朗和弗兰克尔的改进和补充，今天简称为ZF公理系统。在这个系统中，集合论的悖论得到消除。

NBG公理系统。这是1925年由冯·诺伊曼提出的，并经贝尔纳斯和哥德尔修改而成的一个公理系统，今天简称为NBG公理系统。在这个系统中，集合论的悖论也得到消除。

众多的集合论公理系统的产生，并不能说明公理系统的任意性。公理系统是有一定科学标准的，比如：（1）能够容纳康托尔理论的丰富内容；（2）能够克服以往出现的悖论；（3）便于解决集合论未解决的问题，主要是连续统假设。前两条是基本的。关于（3），由哥德尔和科恩的工作可知，连续统假设无论在ZF公理系统还是在NBG公理系统，都是不可判定的，即它既不能被证明，也不能被否证。换言之，在著名的集合论的公理系统中，都不能解决连续统假设。这正是人们不断寻求新的公理系统的主要原因。

3.集合论的意义

集合论是上一世纪末期产生并发展的一个新的数学分支。本世纪以来，它的基本概念和方法不仅渗透到现代数学的各个部门（如分析、代数和拓扑等），而且也渗透到一些自然科学（如物理学和质点力学等）领域，为这些学科的奠基提供了基础，改变了这些学科的面貌。几乎可以说，如果没有集合论的观点，很难对现代数学获得一个深刻的理解。以集合论为基础是现代数学区别于以往数学的重要特征之一。所以，它的创立和发展，不仅对数学基础的研究有重要意义，而且对现代数学和某些自然科学的发展也有深远的影响。

集合论的诞生也是数学中无穷观的一场革命。

人类对客观世界的认识，总是由近及远、由静止到运动、由有穷到无穷的过程。有穷就是有限，它是有界限、有限制之意。以相对静止和有穷为对象之数学就是早期的常量数学。以后，由于人们认识的能动飞跃，数学中引入了诸如"万世不竭"的潜无穷概念。潜无穷无穷无尽，能超越任何给定的界限，所以潜无穷是对任何有穷的否定。用极限理论建立起来的古典微积分，由于用了潜无穷思想，才解决了常量数学无法解决的课题，成为数学发展史上的"转折点"，使数学由古代数学时期进入近代数学时期。

一般说来，对无穷的认识，哲学家比数学家深刻，且走在数学家的前面。正当数学家酝酿着用极限论建立微积分体系之时，哲学家康德已经意识到潜无穷的局限性。他说，这种无穷就像"最远世界总也还有一个更远的世界，无论回溯到多么远的过去，后面也总还有一个更远的过去，无论前进多么远的将来，前面也总还有一个更远的将来；想象穷于这样不可测度的遥远的前进，思想也穷于这样不可测度的想象；像一个梦一样，一个人永远漫长地看不出还有多远地向前走，看不到尽头，尽头就是摔了一跤或是晕倒下去。"①实际上，晕倒的地方仍然不是无穷而是有穷。哲学大师黑格尔认为，潜无穷是"人们先立定一个限度，于是超出了这个限度。然后人们又立一个限度，从而又一次超出这个限度，如此递进，以至无穷"②。正如恩格斯所说，在黑格尔那里，这种无穷就像 1 + 1 + 1 +……一样，是同一个东西永恒的重复，是一个"空漠的荒野"。黑格尔把这种无穷贬称为"坏的无穷"（或恶的无限）。康德和黑格尔对潜无穷的批判虽

① 转引自黑格尔：《逻辑学》上卷，商务印书馆1977年版，第246页。

② 黑格尔：《小逻辑》，商务印书馆1980年版，第207页。

有过头之处，但是他们的确看到了这种无穷的局限性。

数学的历史特别是微积分的历史表明，潜无穷在一定的条件下是便于使用的，但若就此止步，把它作为唯一的无穷观则是片面的。前面已经说过，承认潜无穷的逻辑结果必须承认实无穷。微积分极限论的先驱者波尔查诺也是探索实无穷的先驱。他在试图对微积分的基本概念作出严格表达的研究中，已经认识到传统的无穷观——只承认潜无穷、否认实无穷的狭隘。在他后期所写的《无穷的悖论》（1848年写成，1851年发表）一文中，力图说明实无穷无论在数学中还是在哲学中的存在都是合法的，并用“一一对应”方法证明了无穷集合可以和它的真子集相等。由于这一结果违反了“整体大于部分”这一直观的、传统的认识，而他又无法作出合理解释，所以没有坚持到底。对这一违反传统认识的结果作出合理解释，并把“一一对应”方法坚持到底的是康托尔。根据康托尔的思想，有穷与无穷是不同的概念，有不同的性质。“整体大于部分”是有穷的主要性质之一，不能把它强加于无穷，正如不能把实数的某些性质应用于虚数一样。

在人们具体的实践活动中，所能完成的只能是有穷。潜无穷（如1、2、3、…、n、…）是在有穷基础上的数学抽象，是一种永无休止的发展过程，是发展的趋势，是动态的。可见，潜无穷对具体的实践活动来说是无法完成的。但是人的思维的能动性常常可以超出实际活动，能够模写运动和反映飞跃。数学中收敛序列极限的求出就是例子。需要说明的是，我们把潜无穷看作能够完成的整体，不是简单地作为一条公理来使用，也不是出于某一哲学信仰，而是根据对问题的具体分析。

例如：设一质点p沿直线从坐标为1的点向原点o连续移动，后到达原点，则点p必须通过无穷点集（数集）：

$$\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\}$$

中的一切点，否则点p将不可能到达原点o。这时将无穷点集看作已经完成的整体就是自然而然的事。但$\frac{1}{n}$同自然数n 是一一对应的，所以“一切自然数”概念（实无穷）就被确定下来。

因此，认识的能动飞跃，可以设想潜无穷如1，2，3，…“一下子”呈现在我们面前，从而就在潜无穷概念的基础上形成实无穷概念。实无穷是把潜无穷看作已完成了的、封闭的实体，是静态的，也是把无穷“有穷化”的结果。

实无穷同有穷有相同的一面，比如，二者都是静态的，都有数量特征（比如实无穷有不同的基数）等，但是二者又有本质不同，比如“整体大于部分”对有穷适用而对实无穷则不适用等。在潜无穷基础上抽象出来的实无穷又与潜无穷不同。潜无穷是对有穷的否定，实无穷又是对潜无穷的否定：

有穷——潜无穷——实无穷

应当说，把实无穷引入数学同历史上把潜无穷引入数学具有同等重要的意义。变量引入数学，微积分的产生，使数学发展由古代数学时期进入近代数学时期；实无穷进入数学，集合论的产生，又使数学的发展由近代数学时期进入现代数学时期。集合论专家弗兰克尔认为，康托尔的超穷数对于数学，同哥白尼的日心说对于天文学、同相对论和量子力学对于物理学一样，具有同样的革命意义。

4.康托尔的数学哲学

康托尔用他的丰富的想象力和顽强的创造精神所描绘的无穷世界的图景震惊了19世纪和20世纪初期的数学界，他所创立的集合论不仅给现代数学提供了统一的基础，而且对数学哲学的发展也产生了强烈的影响，正如朱得因在为康托尔著作《超穷数论奠基贡献》一书写的序言中所说：“由康托尔的工作所引起的哲学革命的影响恐怕远远超过由此而引起的数学革命的影响。”

首先，由前面所述，康托尔为两千年来人们望而却步的实无穷进行了充分而又系统的论述，使它成为数学的研究对象。在这一点上，人们称他是实无穷论者。其实，他不像康德和黑格尔等哲学家那样偏颇——只承认实无穷而批判潜无穷。在他的理论体系中，不仅有潜无穷和实无穷的明显区分，而且还有潜无穷和实无穷的对立统一。这一点从他提出无穷生成的三个原则就可以看得出来：他的延续原则是潜无穷，而他的穷竭原则又是实无穷。可见，在他那里，两种无穷概念只不过是对同一个无限性从两个不同侧面的模写或反映。因此，一般认为他的无穷观是全面的。

第二，康托尔的形式主义的倾向。一般来说，形式主义者认为，纯数学是没有实际内容的符号系统，它的真理性等价于系统的相容性。因此，凡形式主义者都强调数学的自由创造性。康托尔是有这种倾向的。他说："就新数的引进而言，数学中必需的仅仅是给出它们的定义，借助这些定义，赋予新数以这样的确定性，以及在情况允许时，赋予它们与旧数这样一种关系，使得在给定的条件下，一种新数在数学中可以而且必须被认为是存在的和真实的。"① 他还说："数学在它的自身的发展中完全是自由的，对它的概念的限制只在于：必须是无矛盾的，并且和先前由确切定义引进的概念相协调。……数学的本质就在于它的自由。"② 据研究，随着他的兴趣逐渐转向哲学，他的形式主义倾向也变得比较明显。

数学的发展，除过研究直接或间接来自客观世界的问题外，还研究数学自身在发展中提出的种种问题。对高度抽象的现代数学而言，形式化是其特点之一。在这个意义上说，康托尔的形式主义观点也有合理的成分；他所主张的"自由创造"，如果不是

---

① J.W.道本：《康托尔，他的无穷的数学和哲学》，第128—129页。

② M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第105页。

“主观的任意虚构”，也是应当肯定的。但是在数学观上，康托尔夸大了数学相对独立性。他认为，数学家只须考虑数学的无矛盾性，无须顾及客观实在性，这是不对的。康托尔把数学内容的相容性作为判别数学真理的标准的观点，早已被其反对派所批判：一个理论系统中矛盾的发现并不等于该理论被否定，而只是说明该理论不够完善，还需要修改；相容性的证明只是数学真理性的必要条件，而不是充分条件。

第三，相对于形式主义，康托尔的柏拉图主义色彩更加浓厚，一般认为康托尔是现代柏拉图主义代表人物之一（参看4.3节）。柏拉图主义认为，数学对象存在于一个完全独立于人们认识的理念世界中，数学命题只是陈述了这个理念世界中的真实情况。康托尔实际持这一立场。比如，他声称，他自己并非超穷数理论的创立者，而不过是作为一个忠实的记录者在向世人传达上帝的新思想。他于1888年在给一位朋友的信中说：“我对超穷的真理性深信不移，正是在上帝的启发下我认识到这一真理的，对于它的丰富内容，我已研究了二十余年，每一年，每一天都使我在这一科学中取得新的进展。”①

康托尔的柏拉图主义数学思想的形成是有其历史原因的。原来集合论产生和发展的道路非常坎坷，在它的初期，人们不仅没有认识到它的重要意义，而且它还受到包括当时一些权威人士在内的相当多的人的反对。由于实无穷在历史上给数学带来的严重困难，更由于反对派的权威地位，所以康托尔同他的学说一起受到排斥。在学校中，康托尔只拿同等学历教授工资的一半；在社会上，几家著名杂志拒绝刊登他的论文。他完全是孤身奋斗于逆境之中。粗暴的指责和无理的歧视，曾使康托尔一度精神失常。他也曾因气愤而放弃数学，转搞文学、哲学和神学。宗教信仰成

---

① J.W.道本：《康托尔，他的无穷的数学和哲学》，第148—149页。

了他在困难年代的精神支柱。康托尔的柏拉图主义就是在这种历史条件下产生并形成的。康托尔用上帝的意志论证他的超穷的实在性自然是荒谬的，有人认为，康托尔笔下的上帝对他来讲，既是一种信仰，也是一种价值观念，是他能继续进行数学研究的精神支柱，否则很难设想他能激流勇进，并获得成功。

随着时间的推移，人们逐渐认识到集合论的重要性，所以从1891年他的老师、反对者克隆尼克去世起，康托尔的处境开始好转。特别自1901年勒贝格积分的产生以及用勒贝格的测度理论充实了集合论之后，集合论才得到公认，康托尔的工作终于获得很高的评价。例如：希尔伯特称赞康托尔的超穷算术为“数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一”。罗素把康托尔的工作称为“可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作”。

3.2 希尔伯特的《几何基础》

希尔伯特是屹立于19与20世纪之交的数学巨人，对两个世纪数学的发展有承前启后的作用。

希尔伯特出生于东普鲁士首府哥尼斯堡的一个律师家庭。他的工作涉及数学各个方面，并对数学每一个重要领域都有开拓性贡献。以他同F.克莱因为核心，形成了举世闻名的哥廷根学派，在一段时间内，哥廷根成了世界数学家心目中的麦加。在1900年第二届国际数学家大会上，他提出的著名的23个数学问题，极大地影响了20世纪数学的发展。以他为代表的数学哲学思想是本世纪初期数学基础研究中三大学派之一。

本节仅介绍他的著作《几何基础》及其意义。

1.几何基础问题的提出

希尔伯特的《几何基础》（1899）一书，是使用公理方法的

典型著作，从此开始了现代数学公理化的趋势，而这一趋势也是现代数学区别于以往数学的重要标志之一。如果说对欧几里得《几何原本》的第5公设的研究是非欧几何产生的基本原因，那么，对《原本》的缺陷的系统分析与研究，则是产生《几何基础》一书的根本原因。

《几何原本》到底有哪些缺陷呢？概括起来大致有如下三个方面。

第一，没有基本概念。欧几里得试图对所使用的一切概念都予以定义。例如，他把点定义为“没有部分的东西”，把线定义为“没有宽度的长度”，把面定义为“只有宽度和长度的东西”等等。那么，部分、宽度、长度又是什么呢？还必须定义。这样定义下去，不是无穷倒退，就是逻辑循环，不可能建立严格的数学体系。事实上，《原本》从未用过：因为点没有部分或线没有宽度，所以就如何如何的逻辑格式。欧几里得采取的作法实际是落脚到“直观显然”为止，其实这并非他的初衷。

第二，许多定义含混。比如，他关于直线的定义是，“直线是同其中各点看齐的线”；他关于平面的定义是，“平面是与其上直线看齐的那种面”等等。什么是“看齐”？难于理解。实际上，欧几里得的定义是以直观为基础的。

如果说上述两个是容易改正的技术性问题的话，那么，下面将要谈到的第三个则不是技术性的问题了。

第三，公理不足。在《原本》的极为珍贵的五个公设中，其中一个是“凡直角皆相等”，这一公设显得多余，《原本》从头到尾从未用过。但是更重要的是没有运动公理、连续公理和顺序公理。如果没有运动公理，那么用图形移动后与另一个图形重合的办法论证两个图形全等就缺乏逻辑根据。如果缺乏连续公理，则两条线交点的存在性就得不到逻辑保证。这是显然的。欧几里得实际假定线是一种连续的结构以保证交点的存在。如果没有顺

序公理，则许多错误的结论，如任意三角形是等腰的、直角等于钝角、从一点到一直线有两条垂线等均可“证明”。作为一个例，下面“证明”任意三角形都是等腰三角形。

作出任一个△ABC（图3.1），为了“证明”它是等腰的（AB＝AC）。先作∠A的分角线AO，它同BC边上的垂直平分线DO相交于O点。（如果∠A的分角线同BC边上的垂直平分线平行或重合，则易知AB＝AC。）过O作OF⊥AB，其垂足为F；过O作OE⊥AC，其垂足为E。则图中分别标着两个Ⅰ、两个Ⅱ、两个Ⅲ的三角形全等，这就得出AB＝AC，即△ABC是等腰的。

实际上，对图3.1而言，O点的位置不应在三角形的内部，而应在其外部，且在其外接圆周上，这是不难证明的。但是，如果我们把图画成图3.2的形式，若无顺序公理，则仍然可以“证

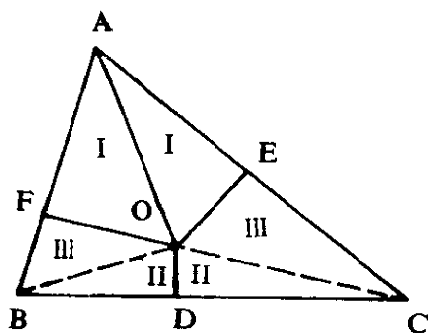


图 3.1

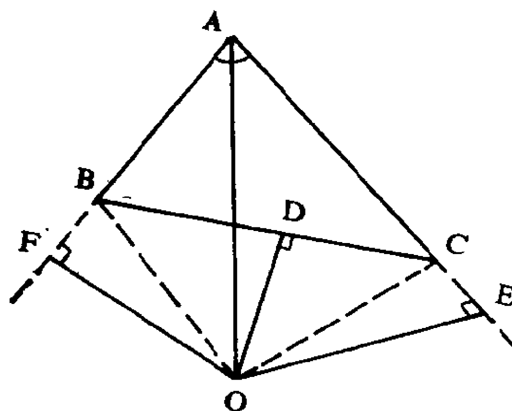


图 3.2

明”△ABC是等腰的。错误在于E、F两点应分别在AC之间和AB的延长线上。这表明，在开始证明之前必须分别确定A、B、F和A、C、E的正确顺序，而不是依赖画出的粗糙图形。因为图形如果不精确，往往得出错误的结论（如上例）。所以，欧几里得的证明实际是在提供了准确的图形的条件下的证明。

《几何原本》的上述缺陷的被人注意，可以追溯到它的两位早期注释者帕普斯（4世纪）和普罗克洛斯（5世纪）。文艺复

兴时期，《原本》被介绍到欧洲，上述瑕疵引起人们的注意。比如，16世纪的普莱特在他的《欧几里得几何原本中的证明》(1557)著作中，对欧几里得使用叠合法证明全等方面的定理提出了批评。德国哲学家、唯意志论的创始人叔本华在1844年也说，他感到奇怪的是，数学家们一方面对于平行公理耿耿于怀，另一方面又对使用运动叠合法却心安理得。他认为重合的图形无疑是恒等或相等的，而无需什么公理。重合完全是一种经验性质的事情，属于外部感官的经验，不属于纯直觉知识。另外，这条公理预先假设了图形的可移动性；但是，在空间中能移动的是具体的物质，因此，超出了抽象的几何范围。19世纪时人们已普遍认识到：迭合法或者是建立在一些未明确说明的公理的基础上，或者必须用另一种全等的方法来代替。①

数学家高斯也注意到了《原本》的不足。他在1832年3月6日写给他的同学F.波尔约的信中，批评了《原本》关于直线和平面的定义，还指出："在完全的阐述中，诸如'在……之间'那样的词必须建立清晰的概念上，这是能够做到的，但我在(《原本》的任何地方都没有看到过。"②

对《原本》的批评，虽然早已有之，但是在1800年以前，人们普遍认为《原本》仍是严格的典范；批评的意见主要限于数学家的圈子。但是，从19世纪开始，随着数学知识的普及与提高，人们能相当容易地挑剔出其中的毛病，《原本》作为严格典范的灵光在逐渐消失。非欧几何的产生与发展，使数学家认识到数学推理严格的重要性。微积分奠基工作的完成，终于使以"完美无缺"的面貌出现的《原本》相形见绌。为了克服《原本》的不足，在19世纪的后30年，数学家广泛地开展了重建欧几里得几何

---

① 参见M.克莱因：《古今数学思想》第4卷，第74—75页。

② 同上书，第75页。

的工作。

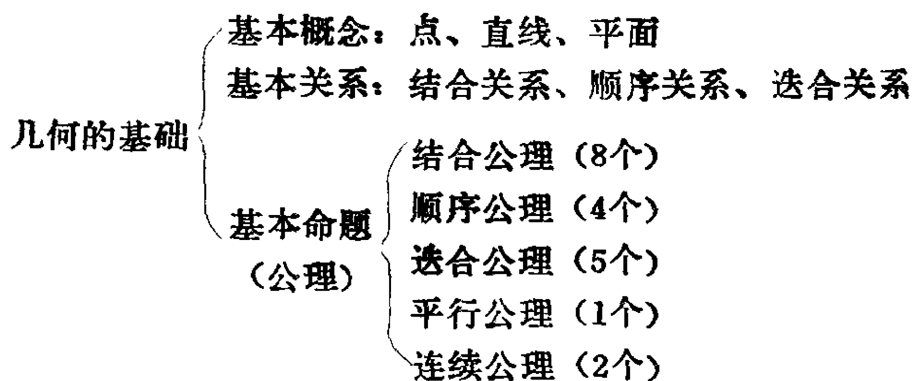
2.《几何基础》及其意义

在重建欧几里得几何的工作中，第一个作出重要贡献的是德国数学家帕施。他的有关著作是《新几何学讲义》（1882）。该书在1926年被德恩修订并再版。帕施认为，为了避免无穷倒退或逻辑循环，应挑选一些不加定义的基本概念，当然这种选择原则上说不是唯一的。但当这些概念一旦被挑选出来，其它的概念就应通过它们定义出来。对于公理，帕施认为它们虽然可以通过实验来验证，但是决不是不证自明的真理，它只是为了产生一门几何定理所作的假定；当公理一经选定之后，就必须能够完成所有的证明，而不必考虑定理的实践证明。帕施确信，无论是基本概念还是公理，都同经验有关，但是这同逻辑推理是不相干的。帕施的《讲义》已相当完善，他提出的12个公理。已接近现代的形式。帕施第一个建立直线上点的顺序公理，即所谓的“帕施公理”：设 A、B 和C是不共线的三点，并设a是位于A、B、C所在平面上且不经过A、B 或C 的任一直线。如果a经过线段AB上的任一点，那么a必定经过线段AC或线段BC上的一个点。帕施的工作虽然相当成功，但是由于他论证中只取线段而不是取直线，只取平面块，而不取整个平面，所以他的论证非常复杂、烦琐。帕施为什么只取有限的线段和平面块呢？因为在他看来，无限的直线和平面不可能从经验中得到。但他没有想到，数学意义下的线段与平面块也是抽象的概念。

意大利的皮亚诺及其学生皮埃里对重建欧几里得几何学也作出了重要贡献。皮亚诺的有关著作是《逻辑地叙述的几何基础》（1889）。同帕施一样，他重视不加定义的基本概念，但他更进一步地提出了一个原则：不加定义的概念应该尽可能少。鉴于欧几里得用叠合法证明两个图形全等的方法受到批评，所以他认为应把运动和点、线等概念一样，作为不加定义的基本概念。皮埃里接受了这一思想，给出了一个公理系统，这个系统相当于下边

将要谈到希尔伯特的第一、第二组公理。

在19世纪的最后30年内人们所给出的种种公理系统中，对概念的陈述最精炼、最完备、其思想也最接近欧几里得公理系统的是德国大数学家希尔伯特在其著作《几何基础》（1899）中给出的。他并不知道皮亚诺等人的工作。该书首先提出了三个不加定义的概念：点、直线、和平面。希尔伯特继承了帕施关于基本概念的有关思想，这就是基本概念的性质由公理来规定。接着希尔伯特又提出三个基本关系：结合关系、顺序关系和迭合关系，然后他精心挑选了20个公理（这20个公理可以在教科书中找到，在这里不再占篇幅）。需要说明的是，这20个公理自1899年提出以后，其条目几经修改，文字一再提炼，1930年《几何基础》一书出第7版时，作者作了最后的修订。希尔伯特按照公理的性质又把这20个公理分成五组：结合公理（又叫联关公理），顺序公理（又叫位置公理），迭合公理（又叫运动公理），平行公理，连续公理。因此，几何的基础如下表：



在这个公理系统中，不仅有了基本概念和关系，而且还加上了顺序公理、迭合公理和连续公理。这样，欧几里得几何所有命题都可以用这个公理系统作为基础，经过逻辑推导出来。在作逻辑推导过程中，如果不是为了启迪思维、帮助思考，原则上可以不依赖任何图形。这样，《几何原本》中所存在的缺陷都在《几何基础》中都得到满意的克服。希尔伯特曾经说过，《几何基

础》中的点、直线和平面，可以分别用桌子、椅子和茶杯或者用其它三个任何东西代替。如果说在《几何原本》中的点、直线和平面仅限于直观的几何解释的话，那么，在《几何基础》中的点、直线和平面则容许有不同的解释，只要它们符合公理所规定的关系。可见，《几何基础》乃是比《几何原本》高一个层次的数学著作。

《几何基础》是迄今为止用公理方法建立数学体系的最典型的著作。它的问世，给数学带来深远的影响。从此，数学的许多部门如抽象代数、拓扑空间和集合论等都用公理方法建立它们的体系，甚至像概率论这样联系实际比较紧密的数学部门，也只有用公理方法叙述以后，它的基础才被认为是稳固的。不仅如此，公理方法也被用于现代某些自然科学领域。例如，本世纪40年代波兰数学家巴拿赫曾完成了理论力学的公理化；物理学家还把相对论表述为公理化形式，等等。前面已经说过，数学公理化的趋势，是现代数学区别于以往数学的重要标志之一。

3.3 代数学与数论思想

1.代数学概观

代数学是数学中最古老的分支之一，主要以研究离散系统而同几何学和分析学相区别。它以语言精确、优美而著称，以至有人认为，数学是自然科学的语言，而代数又是数学的语言。

代数学的产生不像解析几何和微积分那样，有一个或几个公认的创始人或奠基人，而是在漫长的过程中逐渐形成和发展的；特别是它的早期，几乎出现于不同的国家或地区，虽然在时间上有先有后，但却是独立地产生并发展的。因此19世纪初期以前的代数学，更能体现集体智慧的结晶和数学同社会实践的辩证关系。

代数学的发展经历了如下三个阶段。

17世纪初期，由于韦达和笛卡尔等在数学中系统地引入了符号，因此，人们把代数即今天的初等代数理解为对**文字计算的理论**。这时期，它的内容非常广泛，不属于纯几何的内容几乎都是它的内容，如级数、对数、牛顿二项式、解代数方程、解联立方程组以及解不定方程等。所以17世纪时的代数几乎是数学的同义语。这一思想影响很大，18世纪末期所产生的代数微分法，就是试图把微分学（见2.7节）也纳入代数学范畴的例证。

17世纪以后，代数在解方程的基础上，先后沿两个方向发展。一个方向是，当代数方程的次数增加时围绕代数方程的根式解法发展而成的代数方程论，这些在1.6节与2.5节中已有介绍。另一个方向是，当未知数的个数与代数方程的个数同步增加时围绕联立方程组的解法而形成的线性代数。代数方程论和线性代数是现代大学数学系“高等代数”课程的重要内容。

从17世纪中期到19世纪初期，主要是方程式论的发展时期。这时期由于负数、无理数和虚数在数学中的地位相继得到确认，也由于人们的注意力集中在高于四次的代数方程的根式解的寻求，并得到一些重要成果，比如代数基本定理的证明和方程根与系数之间的关系的被揭露等（见1.6节），这一切使得方程式论的研究在代数中居主导地位。主要矛盾的变化使代数的性质也发生了变化：人们又把代数学理解为关于**代数方程论**的学科。

如果说19世纪初期以前主要是代数方程论的发展时期，那么，19世纪初期以后则主要是线性代数的发展时期。这时期的数学家，为了解线性方程组，陆续建立并发展了行列式、矩阵、向量空间以及线性变换等概念和有关理论，从而形成了今天的线性代数的基本内容。在本世纪，线性代数已成为一个独立的数学分支。线性代数主要处理一般的一次代数方程所表达的数量关系，即含有n个未知数的一次方程。当$n=2$时，就是二元一次方程，它表示平面上的直线；当$n=3$时，是三元一次方程，它

表示空间一张平面；空间直线用两个平面的交线表示。随着向量概念引入数学，在直线与平面的基础上数学引入了n维向量空间概念。同一域上两个向量空间的映射叫线性变换。这样，凡一般的线性问题都可以用向量空间的观点处理。因此，向量空间和线性变换，以及同其有关的行列式和矩阵理论构成线性代数的中心内容。

"直曲关系"是哲学中相对与绝对的辩证关系在数学中的表现之一。许多实际问题并非线性问题，但却往往归结为线性问题来处理。因此，线性代数的理论和方法也随着数学的发展而不断扩大。今天，它的理论和方法不仅渗透到许多数学领域，而且也应用于理论物理学和理论化学等自然科学领域，特别是它的计算方法是现代计算数学的重要内容之一。现代代数学、几何学无非是高次联立方程组的解所构成的集合的研究。

从19世纪30年代开始，代数学的发展又取得突破性的成就，这主要是由四次以上代数方程根式解的寻求而产生的伽罗瓦理论（见2.5节），并以其为标志开创了代数学发展的新阶段——**抽象代数**阶段。

2.抽象代数思想简述①

抽象代数亦称近世代数，它是在初等代数的基础上，通过数系概念的推广或者其它可以实行代数运算的对象的范围的扩大而形成的数学领域。它的研究对象是任意元素的集合和定义在这些元素之间的并满足若干条件（即公理）的代数运算；它的中心问题是研究各种不同的代数结构（又叫代数系统）的性质；建立它的体系的方法是公理法。

什么是代数结构？设S是一个非空集合，其中的元素为a、

---

① 参见《中国大百科全书·数学卷》（中国大百科全书出版社1988年版）中有关条目。

b、c、…，并设有若干运算；如果S中之所有元素对这些运算满足封闭性，即S中任意两个元素a与b（也可以相同）用这些运算联系后所确定的元素c仍是s中的元素；如果对s中的元素实施的运算单独地或相联系地遵守通常四则运算所适合的法则（如结合律、分配律、交换律等），则集合S对这些运算就是一个代数结构。由各种代数结构的公理出发研究它们的性质，就是所谓的抽象代数。现在的抽象代数已有群、环、域、模、代数、格以及范代数、同调代数、范畴等重要的代数结构。对不同的代数结构性质的研究形成了抽象代数中不同的数学理论，如群论、环论、域论等等。其所以叫“抽象”代数，因为集合s中的元素既可以是通常的数，也可以不是通常的数；其中的运算既可是通常的四则运算，也可以是别的结合。

例如，设ΔABC是任一个等边三角形（图3.3），不改变它在空间位置的刚体运动计有a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6六个：前三个表示它绕其中心按逆时针方向分别旋转0°、120°、240°（旋转0°是不动变换）；后三个分别表示对BC、AC、AB边上中线（即高）的反射。集合$\{a_1, a_2, \cdots, a_6\}$构成一个群。其中任意两个运动的结果必为其余四个中的某一个。例如，先作运动a_2，再接着作运动a_4，结果就是运动a_6，记为$a_2 \cdot a_4 = a_6$。在这里，集合中的元素并不是通常的数量，这里的“乘”也不是通常意义的乘。

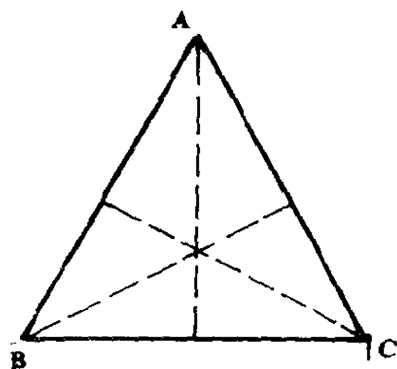


图 3.3

抽象代数萌芽于18与19世纪之交，发展于19世纪，定型于20世纪20年代，40年代以来又有许多新的发展。它的产生，归结起来有三个根源。

第一是代数方程方面。由于寻求高于4次代数方程的根式解

法而产生了伽罗瓦理论。在伽罗瓦理论的形成过程中，人们已经接触到有限置换群、域以及同构等抽象代数中的重要概念。19世纪80年代已产生了群的一般定义及其理论——群论。这是抽象代数的重要组成部分，也是19世纪研究较早而且又是研究的比较充分的部分（参看2.5节）。

第二是数论方面。首先是18与19世纪之交，在拉格朗日和高斯等关于整系数的二次型$ax^2+2bxy+cy^2$的研究中，对判别式D取固定值的二次型，引进了在整系数且行列式为1的二元变换下等价的概念，并阐明只有有限个等价类。对于这些类引进它们的“复合”作为运算，这样实际上就得到了一个有限变换群。其次，从高斯关于复数的研究开始，在狄利克雷、库默尔、克隆尼克、狄德金、希尔伯特等对代数数论的研究中，已经引入了域、理想、模等抽象代数的概念。对费尔马大定理的研究，导致库默尔第一个提出理想数的概念；狄德金不仅建立起理想的理论，而且还首次引进格的概念来研究理想。

第三是线性代数和代数方面。这方面包括1830—1850年间英国的布尔建立起的逻辑代数即布尔代数（一种特殊的格），哈密顿建立起的向量代数、四元数非交换代数，凯莱建立的矩阵代数和八元数非结合代数，还有英、美、德等国更多数学家的向量代数、线性代数和外代数工作。上述代数元素对乘法运算，有的不满足交换律，有的不满足结合律，而有的又有零因子（如矩阵代数，$a\neq 0$，$b\neq 0$，而$ab=0$）。这使得已有的代数运算与运算的对象大大地扩充。这些扩充了的运算和运算对象由于同力学和物理学的联系而得到发展，对它们作更高层次的抽象、概括，产生了群、环、域、格等抽象代数中重要的概念和有关理论。

到19世纪末期，研究得比较充分的是方程根的置换群、几何学中图形的运动群、物理学中的晶体群以及函数论中的变换群。这些群的元素都是具体的变换。1882年英国的冯·迪克等把它们

的共同特征抽象出来，用符号代替具体群的变换，开始了抽象群的理论研究。群论就是研究群的性质和应用的数学学科。

19世纪80年代，冯·迪克等群论公理化已经完成了，大约到1890年得到公认。这对希尔伯特公理化思想的形成无疑是一个促进；反过来，公理化思想又加快了抽象代数公理化过程。本世纪初期，不少数学家都给出过抽象群的种种独立公理系统。群论的产生与发展导致本世纪初期抽象代数的产生与发展。1911年，斯泰尼茨的论文《域的代数理论》，对过去已有的不同域进行了统一处理，形成域论的基础，是抽象代数的重要里程碑。

环论是抽象代数中较为深刻的部分（如域是环的特例），也是成熟较晚的部分。虽然环的具体实例在19世纪可以找到(如四元数、八元数和超复数等),但是它的抽象理论却是20世纪的产物，并以E·诺特和E·阿廷的工作为标志。

E·诺特是德国犹太族，女数学家。她在哥廷根时，仅仅因为是女性而受到歧视，在学校她是没有正式工资的“编外教授”，常常在希尔伯特的名下教课，从中取得微薄的代课费。更因她是犹太人受到希特勒的种族歧视，被迫离开德国去了美国。她可能是迄今为止在数学中最享有声誉的女数学家。在诺特之前，虽有关于环和理想的某些成果，但是她将这些成果予以更确切地表述，给出了环和理想的系统理论。诺特还把多项式环的理想论包括在一般理想之中，为代数整数理论和代数函数理论建立了共同的基础。这些工作大致完成于1926年。有人把这一年作为抽象代数形成的一年。诺特的学生、荷兰数学家范·德·瓦尔登根据诺特和阿廷的讲稿于30年代初，综合了当时抽象代数的成果写成《近世代数》一书。这是抽象代最早的一部经典著作，对抽象代数的发展起了巨大的推动作用。该书从50年代起，第4版改称《抽象代数》，第5版又改称《代数学》。书名一改再改说明了30年代以来代数学又有发展。

以范·德·瓦尔登的《近世代数学》为标志，抽象代数成为一门以研究各种代数结构（群、环、域、模、代数、格等）为中心内容的学科。由于运算、结构及其元素的一般性，它的思想和结论已经渗透到许多数学和自然科学领域，并产生了一批具有新内容的数学学科，如代数数论、代数几何、拓朴代数、李群和李代数等。特别是20世纪30年代，抽象代数的基本内容已成为现代数学工作者以及某些科技工作者必须掌握的数学知识。

在1933—1938年间，经过伯克霍夫、冯·诺伊曼、康托罗维奇等人的工作，格论已确立了在数学中的地位。自20世纪40年代中期起，作为线性代数推广的模论得到进一步的发展并产生深刻的影响。在模论产生和发展的同时，泛代数、同调代数、范畴等崭新的领域被建立并发展起来。这些概念均在抽象代数中起统一作用；对其中任何一个进行研究，都要涉及许多代数结构，甚至其它数学结构。

3.数论思想简述

数论是研究数的规律，特别是研究整数性质的数学分支。由于侧重面和方法的不同，它又分初等数论、不定方程、解析数论、几何数论、丢番图逼近、堆垒数论、超越数论、代数数论等较小的分支。数论是最古老的数学分支之一，也是历代数学家感兴趣的研究领域。下面简要介绍其若干方面。

初等数论是主要用算术方法研究数论命题的分支。它萌芽于公元前6世纪以前，酝酿于17、18世纪，定型于18与19世纪之交。我国在殷商时代已将“十干”和“十二支”配合成“六十甲子”，这是最早的最小公倍数的计算和应用。古希腊的毕达哥拉斯已经知道正整数有奇数、偶数、素数、复合数等类型。欧几里得曾经证明了素数有无穷多个，并给出求两个正整数最大公约数的算法，初步建立了可除数理论。

17世纪是初等数论取得重要成就的世纪，并以费尔马的工作

为代表。1640年，费尔马提出了一个未被证明的定理即所谓的“费尔马小定理”：设p为素数，则对任何的整数a，数a^p-a都是p的倍数。该定理于1736年欧拉首次给出证明，并于1760年把它推广到复合数的情形。1798年，勒让德出版了第一部数论教科书；1801年，高斯名著《算术研究》问世。这两部著作奠定了初等数论的基本内容。

特殊类型的数是初等数论内容之一。例如，形如$F_n=2^{2^n}+1$的数称为费尔马数。因为n＝0，1，2，3，4时，F_n都是素数，所以费尔马猜测：对任意的整数n，F_n都是素数。但后来欧拉证明，当n＝5时，$F_5=641\times6700417$不是素数，否定了费尔马的猜测。至今人们已经证明了48个费尔马数是复合数。在费尔马数列中，是否有无穷个复合数？是有无穷多个素数，还是有有限个素数？这些都是未解决的问题。再如，当p为素数时，形如$M_p=2^p-1$的数称为梅森数。1644年，梅森证明了当p＝2，3，5，7，13，17，19，31时，M_p是素数。到目前为止，只知道28个梅森数是素数，其中最大的一个是$2^{86243}-1$，写出来有25962位，是今天所知道的最大素数。是否有无穷多个p使M_p为素数，这也是迄今未解决的著名问题。还有一个未解决的猜想：M_p无平方因子。

不定方程是指解的范围为正整数、整数、有理数或代数数的方程或方程组。一般说来，只要未知数的个数多于方程的个数就是不定方程。对这类问题的研究是数论分支之一。它的起源也较早。我国《周髀算经》中的“勾三、股四、弦五”，实际是给出二次不定方程$x^2+y^2=z^2$的一组整数解。《九章算术》方程章中的“五家共井问题”，《张丘建算经》中的“百鸡问题”以及《孙子算经》中的“物不知其数”等都是一次不定方程组问题。西方3世纪的丢番图研究了这类方程，因而又叫丢番图方程。

由勾股定理的启发，费尔马提出了如下三个定理。

（1）每一个形如$4k+1$的素数p可唯一的表示成两个正整数的平方和，即$p=x^2+y^2$（$o<x<y$）。

（2）每一个正整数n都能表示成四个整数的平方和，即$n=x^2+y^2+z^2+w^2$。

（3）不定方程$x^4+y^4=z^2$（$(x,y)=1$）没有$xy\neq 0$的整数解。

费尔马关于（1）、（2）的证明至今没有发现，只见到他对（3）的证明。对于（1），欧拉先后于1749、1773、1783年给出不同的证明。对于（2），1772年，拉格朗日给出了证明。

数论中有这样一个猜想：设a、b、c是一组勾股数，x、y、z是正整数，且满足$a^x+b^y=c^z$，则$x=y=z=2$。对这一猜想，虽有许多工作，但仍未彻底解决。

费尔马在翻译丢番图的《算术》（拉丁文译本，1621）时，曾在空白处写下今天所谓的费尔马大定理，把它用不定方程表示就是：设$n>2$，则不定方程$x^n+y^n=z^n$没有$xyz\neq 0$的整数解。费尔马说他已证明了这个定理，只因空白太小而没有写出来。三个半世纪过去了，虽经许多数学家的努力，至今仍未证明，也无法否定。现在一般倾向性的看法是，费尔马未曾写出的那个证明可能是错的。

在不定方程的研究中，相对而言，两个变量的不定方程的研究比较充分，成果也多。两个变量以上的不定方程，一般说来难度较大，成果较少。莫德尔的著作《丢番图方程》（1969）较系统地总结了这方面的成果。

解析数论是用分析方法研究数论问题的一个分支。在数论中用分析方法大致有两种情况：一种是，或者数论问题本身不用这种方法就无法解决，或者数论问题虽可用别的方法解决，但若用分析法更加简明；另一种是，数论问题本身必须用分析概念才能表述清楚。此外，用分析概念还可提出新的数论问题，促进数论

发展。

解析数论起源于素数的分布、哥德巴赫猜想、华林问题以及格点问题等的研究。18世纪的欧拉曾经证明，当实变数s＞1时，恒等式

$$\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}$$

（n为自然数，p是素数）成立。该式揭示出素数p同自然数n的联系，并由此可推出素数有无穷多个。狄利赫勒于1837年利用分析法解决了在首项与公差互素的算术级数中有无限多个素数的问题，并于1839年推出二次域的类数公式。他还创造了两个研究数论的工具：狄利赫勒（剩余）特征标与狄利赫勒L函数，为解析数论奠定了基础。

1859年，黎曼发表了著名论文《论不大于一个给定值的素数个数》。他把欧拉所证明的恒等式的右边记作$\zeta(s)$，即

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s},$$

并把s作看复变数，现在称$\zeta(s)$为黎曼ζ函数。他指出，素数的性质可以通过复变函数$\zeta(s)$来探讨，并由此推导出许多有价值的结果。特别是他建立了一个与$\zeta(s)$的零点有关的表示$\pi(x)$的公式。因此研究素数分布的关键在于研究复变函数$\zeta(s)$的性质，尤其是$\zeta(s)$的零点性质。黎曼将复变函数论的方法应用于数论的思想，开创了解析数论发展的新阶段，同时也推动了复变函数论的发展。黎曼在这篇论文中还提出了一个著名的所谓黎曼猜想：$\zeta(s)$的所有零点都在直线$R_{e\,s}=1/2$上。据说，现在用计算机已计算出了3亿个$\zeta(s)$的零点，都在该直线上，但并未能从理论上给出证明。

1896年，阿达玛等根据黎曼提出的方法和结果，用整函数理

论证明了素数定理：当$x \to \infty$时，$\pi(x) \sim x(\ln x)^{-1}$。从此，解析数论开始迅速发展。

代数数论是以代数数或代数数域为研究对象的数论分支。它主要起源于费尔马大定理的研究，中间经过许多人的工作，直到19世纪后半期，库默尔和狄得金才为该学科奠定了基础。

超越数论是以超越数为研究对象的数论分支。比如e和π的无理性和超越性的证明等。人们用复变函数论方法已经证明了$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$和i^i的超越性，但是欧拉常数即$r=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$和$e+\pi$的超越性问题至今尚未解决。

数论是只同数字打交道的纯数学。它的发展同其它有关纯数学分支互相促进，基本同步。

电子数字计算机的产生和发展，给科学技术带来深刻的影响，也为数论在实际中的应用开辟了广阔的途径。众所周知，无论什么问题，只有离散化之后才能在计算机上进行数值计算。因此，离散数学在今天显得很重要，而离散数学基础之一就是数论。实际上，数论的成果已被广泛应用于计算机科学、组合数学、代数编码、密码学、计算方法、信号的数字处理等方面。在近30年发展起来的高维数值积分的数论网格法的研究中，用到数论相当多的成果。

在所有纯数学分支中，数论中的猜想和疑难问题是比较多的。其中某些猜想同几何三大难题一样，以其表述简明、内涵易懂而具有魅力，我国广大青年所熟知的哥德巴赫猜想就是其中一个。该猜想于1742年提出，至今仍未最终解决。在我国，由于受到陈景润的成就的鼓舞等各方面的原因，广大青年对其发生强烈的兴趣。据报载，中国科学院数学研究所收到有关和类似这方面的“论文”、信件不下几十麻袋，数目惊人。现在世界上著名的职业数学家，致力于哥德巴赫猜想的研究者寥寥无几，但是在数

学的总体水平比较落后的我国，却有那么多“业余”的哥德巴赫猜想迷，这是令人深思的怪现象。

3.4 几何学和拓扑学思想①

1. 19世纪几何学概观

几何学是研究空间形式的数学，也是数学中最古老的一个门类。现代几何学是一个分支众多的家族，在19世纪以前，它们大体上都是欧几里得几何（最早的著作是《几何原本》）应用不同数学工具或在某一个方向上的发展。

非欧几何 起源于对《原本》中第5公设的讨论。

解析几何 基本思想是把图形看成点的集合，并通过坐标系用方程表示图形；也可以说它是用代数方法研究图形（一次和二次曲线、曲面）性质的学科。

仿射几何和射影几何 分别研究图形在仿射变换和射影变换下不变性质的学科。

微分几何 以微分学和微分方程为工具，主要研究光滑曲线和曲面的学科。

积分几何 通过各种积分考察图形性质的学科，它的产生与发展同几何概率有密切的联系。

代数几何 对象是代数流形。所谓代数流形就是由一个或多个代数方程在坐标系中所确定的点的集合。例如，三维空间中的代数流形就是通常的代数曲线和代数曲面等。代数几何一般讨论三次以上的代数流形，包括流形的结构、奇点的分布、奇点邻域内的性质、某些函数沿流形的积分等方面的内容。

拓扑学 起源于讨论图形在一对一连续变换下不变的性质。

---

① 参见《中国大百科全书·数学卷》中某些条目。

上述几何学在其发展中互相结合又产生了众多的新的学科，如射影微分几何、微分拓扑学等等。

在上述各几何学的发展中，数学家还把欧几里得几何由二维、三维推广到 n（$n>3$）维。通常把平面和普通空间分别称为二维和三维欧氏空间，将其一般化：用n个有序实数（x_1，x_2，…，x_n）定义一个点；并定义两点（x_1，x_2，…，x_n）与（y_1，y_2，…，y_n）之间的距离为$\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$，这就是n维欧氏空间。当 $n=2$ 和 $n=3$ 时，就分别得到通常的平面几何和空间几何。同样，仿射几何、射影几何、微分几何等可以扩大到n维欧氏空间；非欧几何也可扩大到n维非欧空间。

这些众多的几何学除了根源于欧氏几何外，它们之间还存在着内在联系，发现这一联系的是德国数学家F.克莱因。

1872年，F.克莱因在埃尔朗根大学发表了题为“关于近代几何研究的比较”的教授就职演说。演说把当时所有的几何学用变换群的观点统一起来，这就是数学史上著名的“埃尔朗根纲领”。它的思想大致如下：

给定任意几何对象（或称元素）的集合M，并称M为空间。把M中每个几何图形变为另一个图形的过程称为一个几何变换，简称为变换。设G是M上的有限或无限变换的集合，且满足两个条件：G中任意两个变换之“积”仍属于G；每个变换之逆变换也属于G。这时称G为M上的一个变换群。可以推知：运动变换集、仿射变换集、射影变换集等等各自构成一个变换群，分别称为运动群、仿射群、射影群等等。还可以推知：运动群是仿射群的子群，仿射群又是射影群的子群。

给定空间M和它的变换群G，如果G中一个变换能将图形A变为图形B，则称A与B等价。F.克莱因把空间M中图形的等价性质称为几何不变的性质，并把这种不变性质同群G中任意变换下的不变量结合起来，这些不变量为一切等价图形所共有。在某

一个群G中一切变换下的所有不变性质称为从属于群 G 的性质，研究从属于G的性质的几何称为从属于G的几何。

F.克莱因把各种几何看成是研究它们所从属于的各种群的不变性质的理论。例如：经过运动变换的不变性质就是度量性质，研究度量性质的几何叫度量几何即欧氏几何；经过仿射变换不变的性质就是仿射性质，研究仿射性质的几何叫仿射几何；经过射影变换的不变性质就是射影性质，研究射影性质的几何叫射影几何；研究一对一连续变换群的几何就是位置分析（现在已发展为拓扑学）；非欧几何包含在特殊的射影几何之中。对运动群来说，距离、角度、面积、平行性、单比、交比都保持不变；对仿射群，则距离、角度、面积都改变，而同向线段的单比、交比、平行性、共线性则保持不变；对射影群来说，单比、平行性都改变，但是共线性、交比保持不变。这是因为运动群是仿射群的子群，而仿射群又是射影群的子群。就是说，一个群的性质必为其子群的性质，但是反过来不成立。群越大，则其几何内容越少；群越小，则其几何内容越多。

F.克莱因在"纲领"中所阐述的思想极为深刻，不仅统一了当时的所有的几何学，而且将正在襁褓中的抽象代数同几何有机地结合起来，对几何学的发展起了总结性和指导性的作用。

2.微分几何学思想简述

早期的微分几何是以微分学的在几何方面的应用的面貌出现的，到19世纪后半期发展成为一门独立的学科。古典微分几何是应用微分学的方法研究三维欧氏空间的曲线和曲面在一点的性质的学科；现代微分几何已发展成主要应用分析方法研究空间（微分流形）的几何性质的学科。

18世纪，是微积分的发展时期，也是微分几何的酝酿时期，并以欧拉的工作为代表。1736年，他首次引入弧长这一几何量作为曲线上点的坐标，从而开始了曲线的内在几何学的研究。欧拉

将曲线在一点的曲率，描述为曲线的切线方向和一固定方向（如同x轴的正方向）的交角同其相应弧长的变化率。在曲面论方面，他曾引入曲面上的法曲率、总曲率、关于法曲率的欧拉公式以及球面映射等。测地线是平面上的直线在曲面上的推广。欧拉等人证明：在无外力的作用下，一质点如果约束在某一曲面上运动，则其路线必为测地线。法国的蒙日也是微分几何的重要先驱之一。他的著作《分析学在几何中的应用》（1807）是曲线论最早而又系统的著作。

19世纪上半期有关微分几何的内容已经相当丰富，其中包括挠率概念由提出到精确化，梅尼埃定理、罗得尼格公式以及弗雷内公式等的证明。但是对微分几何作出实质性发展的是高斯内在几何的思想。

在高斯之前微分几何不仅没有脱离微积分应用的范畴，而且几何曲面总是用笛卡尔坐标表示，也就是使曲面同外围欧氏三维空间相联系。1827年，高斯发表了《弯曲曲面的一般研究》一文。该文的主要思想是强调曲面上只依赖第一基本形式的一些性质，如曲面上曲线的长度、两条曲线的夹角、曲面上某一区域的面积、测地线、测地曲率以及总曲率等等，称之为曲面的内在性质。高斯证明了，由曲面的第一基本形式就完全确定了曲面的总曲率（又称高斯曲率）；他说："如果一个弯曲的曲面可展开到任何另外的曲面上去，则每点的曲率是保持不变的。"① 这是高斯的著名发现，他称之为"极妙定理"。这里"可展"既表示映射是一一对应，也表示保持距离。高斯在这里所阐述的内在几何的思想为微分几何的发展奠定了基础。可惜这一珍贵思想在当时未被人们所认识。

1839年，俄国的米丁证明：如果两张曲面有相等的常曲率，

---

① 《中国大百科全书·数学卷》，第710页。

则其中一张可等距映射到另一张上面。这实际是高斯的“极妙定理”的推论。米丁的学生彼得松于1853年，意大利的柯达齐于1868年都曾独立地得到联系第一和第二两个基本形式的系数的条件。1887—1896年，法国的达布陆续出版了他的《曲面一般理论讲义》四卷本，总结了微分几何的成就，创造了空间曲线的活动标架概念，建立了完整的古典微分几何体系。

对高斯的内在几何思想作出重要发展的是黎曼。他在1854年以《论作为几何基础的假设》为题的就职演说中，把几何由二维、三维推广到n维（$n>3$），把通常的曲线和曲面推广为n维流形（他当时叫多重广延量；他首次引入n维流形概念，其中的点用n个有序实数组（x^i）表示，并定义了流形上无限邻近两点（x^i）与（x^i+dx^i）的距离d_s：

$$ds^2=\sum g_{ij}(x)dx^i dx^j。$$

这里g_{ij}是正定对称矩阵。上式后来被称为黎曼度量。黎曼以此式作为几何学的出发点，发展出所谓的黎曼几何学。该几何学把以前的欧氏几何和各种非欧几何作为它的特例。

抽象的数学理论的叙述离不开语言文字和数学符号；在极大的程度上，数学符号是数学理论的载体。如果说以往的数学用数量和向量可以应付的话，那么黎曼几何要取得发展就必须有相应的符号，这就是张量。1869年，德国的克里斯托费尔在解决黎曼几何中微分等价形式问题的同时，引进了今天所谓的第一类克利斯托费尔记号$[jk,\ l]$和第二类克利斯托费尔记号$\begin{bmatrix} i \\ jk \end{bmatrix}$，以及协变微分概念。意大利的里奇在1887～1896年，定义了张量概念及其一般运算，发展了张量分析法，这在黎曼几何以及后来的广义相对论中起了基本的作用。里奇的学生列维一齐维塔在其著作《绝对微分法及其应用》（1901）中对张量分析作了系统的叙述。

法国的E.嘉当是本世纪初期伟大数学家之一。约从1920年

以后，他在相对论的影响下，对微分几何作了许多极有价值的工作。他在《仿射联络流形及广义相对论理论》（1923～1924）一文中给出仿射联络的权威性叙述，并将仿射联络这一概念推广到有挠率的情况。以后他又进一步建立了各种联络理论，例如射影联络、共形联络等。在F.克莱因制定《埃尔朗根纲领》时，曾经意识到他的《纲领》不含黎曼几何学，因为一般黎曼空间，除恒等变换外，并不包含其它等长变换。但是经É.嘉当等人的工作，使李群成为微分几何的有力工具，而李群本身也成为微分几何的研究对象，它的推广就是齐性流形即容有可迁变换群的微分流形，这就给出了《纲领》中所设想的几何空间的最一般形式。

在古典的曲线论和曲面论中，人们所研究的问题可分为两种类型：局部问题和整体问题。曲线在一点的切线、法平面、曲率、挠率，曲面在一点的切平面、法线以及各种曲率概念都是局部性质。整体性质则是考虑整个曲线或曲面。古典的微分几何重点是局部性质，而对整体性质是重视不够的。整体性质与局部性质常常极不相同，下面举两个简单的例子。

例1.对任何曲面的局部来说，两邻近点之间只有唯一的一条测地线联结，但从整体来说，这个问题就比较复杂。比如，欧氏空间的任意两点之间只有唯一的直线（测地线）联结；球面上任二点 A、B（设不是对顶点）之间可有两条测地线（即优弧与劣弧）联结；当A、B 是对顶点时，它们之间就有无限多条测地线弧联结。如果考虑是闭测地线，则在欧氏空间是不存在的，球面上的测地线（即大圆）都是闭的。至于一般的曲面，可能存在闭的测地线，也可能不存在闭的测地线。讨论曲面上测地线的存在性就是一个整体性质。

例2.欧氏空间的曲面由第一基本形式和第二基本形式所决定。如果有两个曲面小片s_1和s_2，它们的第一基本形式相同，而第二基本形式不同，则称s_1与s_2互为变形的。三维欧氏空间的一

小曲面片总有无穷多个曲面与它相变形，但这个性质整体上并不成立。例如，一般的凸曲面不存在与之变形的曲面，这称为凸曲面的刚性定理。讨论小曲面片的变形问题是局部性质，讨论曲面的变形问题则是整体性质。

在曲面的整体性质中，一个重要的结果是所谓的高斯——博内定理。这个定理说：对一个封闭曲面的高斯曲率进行积分，其结果是一个常数，且这个常数是欧拉示性数的倍数。这就是说，如果两个曲面同胚，则不论其大小，积分的结果相同。美国的艾伦多弗、法国的A.韦伊和美籍华人陈省身先后用不同的方法将这一定理推广到高维曲面和紧致黎曼流形上去，这是微分几何学的一项重大进展。

现代微分几何学的研究对象是微分流形，若在其上配以不同的附加结构，则得出不同的流形。比如，引进黎曼度量、洛伦茨度量、辛尺度后，则分别得出黎曼流形、洛伦茨流形和辛流形，从而也丰富了微分几何内容。

本世纪以来，整体微分几何学已有许多重大成就。比如：对外微分形式理论与方法的研究，对黎曼流形完备性的研究，对曲率和拓扑的研究，对等距嵌入方面的研究以及对纤维丛理论的研究等，都有重大进展。整体微分几何学的兴起，是本世纪数学最重要的成果之一。

3.拓扑学思想简述

拓扑学起初是几何学的一个分支，它是研究图形在连续变形下保持不变的性质的学科。所谓连续变形，形象地说就是对其进行弯曲、拉大与缩小，但是不允许断裂或粘合的变形；现在已发展为研究连续现象的数学，已是逸出几何学的独立的数学分支。

早期的拓扑学叫形势分析（这是1679年莱布尼茨给出的名称）。形指一个图形本身的性质，势指一个图形与其子图形相对的性质，组结问题和嵌入问题就是势的问题。19世纪中期，在黎

曼的工作中，已经注意到几何对象有两类：一类同度量有关（这是传统几何学对象），另一类只与位置有关而与度量无关（即今天拓扑学的对象）。因此，在历史上它又有“位置几何”和“连续几何”之名；人们也常常戏称它为“橡皮几何学”。1847年，利斯廷取名Topology，它来源于希腊文*τοπος*（位置，形势）和*λογος*（学问）。中文名称拓扑是其音译，本世纪40年代后期已在我国使用。

现代拓扑学已是一个丰饶的领域；它有许多分支，其中主要有：

一般拓扑学　即点集拓扑学，是主要研究拓扑空间的自身结构及其间的连续映射的学科。

代数拓扑学　是拓扑学中主要以抽象代数为工具来解决拓扑问题的一个分支；同调论和同伦论是它的两大支柱。

微分拓扑学　是拓扑学中研究微分流形和可微映射的一个分支。微分流形除拓扑流形外还有微分结构。因此，对于从一个微分流形到另一个微分流形的映射，不仅可以谈论它是否连续，还可以谈论它是否可微。它研究的主要课题有微分同胚（拓扑学中的“同胚”概念是初等几何中“全等”概念的推广）、微分浸入、微分嵌入和协边理论等。

纽结理论　是拓扑学中研究绳结、连锁等几何现象的一个分支。

此外还有可微映射的奇点理论、突变理论以及莫尔斯理论等新兴的分支。

为了对拓扑问题有一个初步的印象，下边举几个简单的例子。

例1.1736年，欧拉把“七桥问题”映射成一个用线联结的网络，欧拉证明了这个网络不能一笔画出，从而解决了七桥问题（见380页图4.3、4.4）。在这个问题中，大块的陆地、半岛用点

表示，具有特色的七座大桥用线条表示，且同线条之长短、曲直无关。

例2.设空间一个凸多面体，其顶点数、棱数、面数分别用v、e、f表示，欧拉于1750年证明，无论什么样的凸多面体，v、e、f之间总满足关系：$v-e+f=2$。他从这个关系式出发，还证明了正多面体只有五种：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。如果多面体不是凸形而是框形（图3.4），也不管框的形状如何，总有$v-e+f=0$。这说明凸形与框形有不同的结构。比如，经连续变形，凸形均可变成球面，而框形只能变成轮胎。在连续变形下封闭曲面有多少种不同的类型？怎样鉴别它们？这同把曲面变成凸多面体后的欧拉数（$v-e+f$）有密切关系。

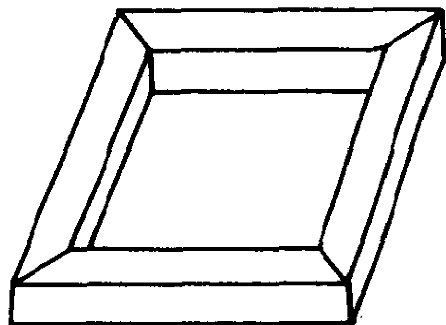


图 3.4

例3.在平面上绘制地图时，有公共边界的区域用不同的颜色加以区别。1852年，格思里猜想至多用四种颜色就可以使相邻的区域的颜色不同。这就是数学中的“四色问题”。这个问题在实践上并不难，但是要用数学方法证明并不容易。直到1976年，有人声明借助计算机证明了这一猜想。如果不是在平面上而是在轮胎上画地图，四色就不够了，要七色才够。设想用橡皮做一个曲面模型，然后随意扭曲，使之出现山峦起伏，对其上的地图着色则同平面一样，所以颜色数也是曲面在连续变形下不变的性质。

例4.绳子打结是人人熟悉的。空间一条自身不相交的曲线也会发生打结现象。要问一个结能否解开，也就是能否把打结的封闭曲线变为平面上的圆圈？这个问题单凭实际操作是不够的，还必须给出数学证明，这就不那么容易了。在这里绳子的长短、粗

细、曲直等无关重要。这就是拓扑学中的扭结理论。

例5.一个复杂的网络能否布在平面上而不交叉？这是拓扑学中所谓的嵌入问题或布线问题。这类问题在做印刷电路时常常碰到。例如，为使四边形的两个对角线不相交(图3.5)，只要把其中一个对角连线移到四边形的外边(图3.6)就可以了；但在图3.7中无论如何也办不到。一个网络能否嵌人平面是拓扑学的内容之一。

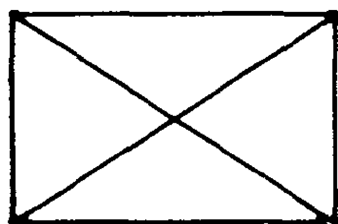


图 3.5

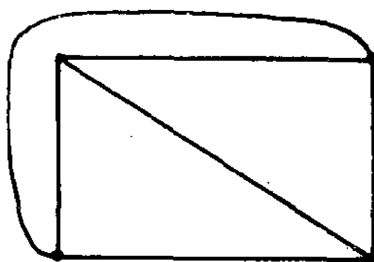


图 3.6

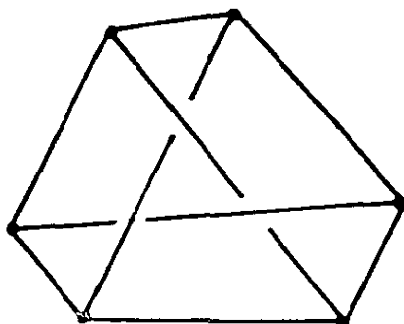


图 3.7

以上例子说明：几何图形中有些性质与长度、角度、面积等所谓的度量性质不同，它们所表现的是图形整体结构方面的特征。这种性质就是所谓的拓扑性质，也是拓扑学的研究领域。还有，拓扑学中所讨论的图形也不限于通常的平面和空间中的图形。如物理学中一个系统的所有可能的状态组成所谓的状态空间，就是一个广义的几何图形。拓扑学着重研究的是自然科学和数学中最常见的几类拓扑空间，如流形（这是光滑曲面的推广）、复形（这是多面体的推广）等。

拓扑学的历史可以追溯到17世纪。19世纪中期，黎曼已经认识到，为了研究函数和积分，必须研究形势分析。黎曼已经解决

了定向闭曲面的同胚分类问题，即定向的闭曲面都分别与球面、环面、两孔环面、…、n 孔环面之一同胚，而它们两两之间不同胚，反过来也成立。他还明确提出n 维流形概念。以黎曼工作为标志，开始了拓扑学研究。

19与20世纪之交，数学家从不同领域的研究中形成了组合拓扑与点集拓扑两个研究方向，以后逐渐发展成今天的一般拓扑学与代数拓扑学。

组合拓扑的奠基人是彭加勒。他是在分析学与力学的研究中，特别是关于复函数单值化和关于微分方程决定的曲线的研究中，引出拓扑学问题的。在1895～1904年间，他发表了许多论文，其中引进了许多不变量：基本群、同调、贝蒂数、挠系数，并给出了计算方法，提出了拓扑学中著名的彭加勒猜想等。他的有关思想对拓扑学的发展影响很大；彭加勒原来的猜想至今没有解决。继彭加勒之后，布劳维尔于1910～1912年间证明了不同维数的欧氏空间不同胚，研究了同伦分类，开创了不动点理论。布劳维尔使组合拓扑在概念精确、论证严密方面达到了应有的标准。

1925年，E.诺特建议把组合拓扑建立在群论的基础上。1928年，霍普夫根据E.诺特的思想定义了同调群。从此，组合拓扑学逐渐演变成代数拓扑学。1935～1936年间，W.赫维茨引进了拓扑空间的 n维同伦群概念。同伦群的计算极为困难，对其计算方法的寻求促进了拓扑学的发展。1939年，波兰数学家艾伦伯格来到美国，他同斯廷罗德合作，于1945年将同调论公理化，总结了当时的同调论，后又写成《代数拓扑学基础》（1952）一书，对代数拓扑学的传播、应用和发展起了促进作用。

拓扑学的另一来源是分析学的严密化。康托尔在他的点集论中提出了聚点（极限点）、开集、闭集、稠密性与连通性等许多拓扑概念。弗雷歇最早研究了抽象空间，并于1906年引进度量空间概念。豪斯多夫在其著作《集论大纲》（1914）中用开邻域定

义了比较一般的拓扑空间，标志一般拓扑学的诞生。随后波兰学派和苏联学派对拓扑空间的基本性质如分离性、紧性、连通性等做了系统的研究。经过20世纪30年代中期布尔巴基学派的补充（一致性空间、仿紧性等）和整理，一般拓扑学趋于成熟，成为第二次世界大战后数学研究的共同基础。

微分拓扑学是研究微分流形与可微映射的数学分支。拉格朗日、黎曼、彭加勒都曾从事过这方面的工作。随着代数拓扑学和微分几何的进步，它在本世纪30年代重新兴盛。美国的惠特尼于1935年给出了微分流形的一般定义，证明了任何微分流形 M^n 可嵌入 R^{2n+1}，可浸入 R^{2n} 中。为微分拓扑学奠定了基础。他还给出纤维丛的一般定义，并定义了惠特尼示性类，1939年证明了示性类的乘积公式等。1953年，R.托姆的协边理论的提出开创了微分拓扑与代数拓扑并肩前进的局面。50年代后期，数学家确认拓扑流形、微分流形以及介于其间的分段线性流形三个范畴有重大差别，微分拓扑遂被公认为一门独立的拓扑学分支。

总的来说，拓扑学酝酿于19世纪，定型于本世纪两次世界大战之间，此后又有重大发展。拓扑学也是本世纪数学最重要的成就之一，一个时期甚至成为数学发展的主流。拓扑学现在已经渗透到所有主要数学领域，以至有人说“不懂得拓扑学就不可能懂得现代数学”，这句话有一定的道理。拓扑学还被广泛用于物理学、化学、生物学、数理经济以及系统理论等领域。

3.5 数学分析思想[①]

1.数学分析概观

数学分析亦称分析学，它以研究连续现象而与几何学和代数

① 参见《中国大百科全书·数学卷》有关条目。

学相区别。在数学的三大部门中，它虽然产生得最晚（以古典微积分的产生为标志），但是现在它却是最大的一个部门。它的许多分支，都是随古典微积分而产生和发展的，是古典微积分沿不同方向发展的结果。因此，数学分析有时也作微积分的同义语。

级数论 在古代数学中已有无穷级数的研究。在近代，级数论和微积分大体上平行发展。它们都以极限论为工具建立自己的理论体系。所不同的是：在古典微积分中基本变量是连续变量x（在某个区间上取值）；在级数论中基本变量是离散的变量n（取全体自然数）。它们在发展过程中也互相促进，比如，级数收歛概念的逐渐明确有助于微积分基本概念的形成，而级数论的发展也要用到微积分知识。今天也常把级数论作为微积分的内容之一。

变分法 研究定义在某一函数集上的某种积分的极值的学科。它起源于17世纪和18世纪时关于最速降落线问题的研究，因此，变分法是古典微积分中求极值方法的发展。所谓最速降落线问题就是：已知O、P是铅垂面上高度不同的两点，设一质点从O点沿一曲线自由滑落到P点（图3.8），在略去摩擦力和阻力的情况下，求曲线呈何形状时质点由O滑落到P所需的时间最短？等周问题也是早期的变分法研究问题之一。这个问题是：在一切具有等长的平面封闭曲线中，求所围的面积最大的曲线。该学科在19世纪已被广泛应用于数学、力学和物理学，并引起重视。例如，在1900年希尔伯特所提的23个问题中，就有三个问题同变分法有关。20世纪以来，又有重大的发展，例如，美国的莫尔斯由古典变分法发展为大范围的变分法。

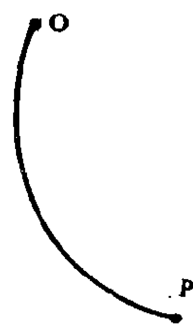


图 3.8

复变函数论 研究定义在复平面上的函数的性质的学科。它

实际是把古典微积分中的变数 x 推广为复变数$Z=x+iy$（x、y为实数）的分析学。

实变函数论 研究定义在实数范围上的实值函数的学科，但它比古典微积分所研究的函数范围广，是微积分的深入和发展，主要包括实值函数连续性质、微分理论、积分理论以及测度理论等。

常微分方程 是含有自变量、未知函数以及未知函数的导数的方程。它作为一个学科，研究常微分方程的解法及解的性质。主要包括定性理论、稳定性理论以及解析理论等。

偏微分方程 含有自变量、未知函数以及偏导数的方程。它作为一门学科，主要研究这类方程解的存在性、有多少解、解的性质以及求解的方法等方面的内容。

积分方程 是未知函数出现于积分号下的方程。例如，

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)\varphi(t)dt=f(x),$$

$$a(x)+\int_{x_0}^{x_1} f[x,\ \varphi(x)]dx=0$$

都是关于未知函数$\varphi(x)$的积分方程。作为一门学科，它主要研究这类方程解的存在性、唯一性、求解方法以及关于它的特征值和特征函数的数学分支。

泛函分析 综合运用几何学和代数学的观点和方法来研究分析学的课题的学科；也可以看作是无限维的分析学。泛函分析包括巴拿赫代数、拓扑线性空间、广义函数论和非线性泛函等重要分支。它在微分方程、概率论、函数论、连续介质力学、量子物理、计算数学、控制论、最优化理论等学科中都有重要应用，它是建立在群上调和分析理论的基本工具，也是研究无限个自由度物理系统的重要工具。

非标准分析 本世纪60年代美国的鲁宾逊所开创的一门分析

学。因其基本思想同19世纪以来的以极限论为基础的分析学（称标准分析）不同而得名。非标准分析与标准分析是等价的理论，前者实际是把牛顿和莱布尼茨的无穷小方法加以严格的理论化，使分析学回归到牛顿和莱布尼茨的思想。自其问世以来，虽有争论，见仁见智，但不失为一种分析学。如果它诞生于18与19世纪之交，今天的微积分乃至整个数学分析也许将是另一个面貌。

2.函数论思想简述

函数论是复变函数论和实变函数论的总称。

复变函数论　主要对象是解析函数（又称全纯函数），即可展为幂级数的函数。它作为一门学科，酝酿于18世纪，基本定型于19世纪，发展于20世纪；今天它已是理论完美、技巧精湛的数学分支，也是解决其它数学问题和许多实际问题的重要工具。

18世纪的欧拉曾引入复数，并证明了欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$。在J.伯努里（1667—1748）和莱布尼茨的工作中，因引入虚数而产生如下的悖论：

$$\because \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x \frac{dx}{x^2-i^2}=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x},$$

$$\therefore \operatorname{arctg}x=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-x}{i+x}。$$

上式令$x=1$则有：

$$\operatorname{arctg}1=\frac{1}{2i}\ln\frac{i-1}{i+1}=\frac{1}{4i}\ln\left(\frac{i-1}{i+1}\right)^2=\frac{1}{4i}\ln(-1)^2$$

$$=\frac{1}{8i}\ln(-1)^2=\frac{1}{8i}\ln 1=0$$

于是得到悖论：$\pi/4=0$。

根据欧拉公式易知，函数$\omega = e^z$是以$2\pi i$为周期的函数，因此，由等式$\omega = e^z$所确定的对数函数$Z = \ln\omega$是多值函数。当$\omega > 0$时，Z只有一个实数值，其余数值全是虚数；当$\omega < 0$时，则Z全为虚数值。因此，取$\ln 1 = 2\pi i$，上述悖论自然就不成立了。这个悖论的解决，显示了复数理论的深刻性。

1752年，达朗贝尔在对流体力学的研究中，已考虑到在什么条件下当平面上的点（x，y）趋于一点时复值函数$u(x, y) + iv(x, y)$存在导数。这里要求导数与点（x，y）所沿的路径无关。这个问题的答案是：若$f(Z) = u + iv$在某一域D内定义，且u、v在D内可微，则$f(Z)$可导的必要充分条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}。$$

这个条件今天称“柯西-黎曼方程”。

19世纪上半期，柯西的工作为复变函数论奠定了基础。他定义了复函数的积分，并证明柯西积分定理：若$f(Z)$在区域D内解析，C为可求长的简单封闭曲线，且C及其内部均含于D内，则$\int_C f(Z)dz = 0$。从这个定理出发，可得出许多重要结论，如柯西积分公式、柯西不等式、唯一性定理以及最大模原理等。特别地，若$f(Z)$在域D内解析，则它在D内的任意阶导数存在，且在D内任一点a的邻域内$f(Z)$可展为$Z - a$的幂级数。柯西定理的推广，则得到应用广泛的留数定理。代数学基本定理就是留数定理一个简单推论。应用它还可以计算一些较复杂的定积分。

19世纪中期，黎曼对保角映象（即共形映象）作了研究，并首先提出如下原理（狄利克雷原理）：在简单封闭曲线C上给出一个连续函数φ，则必存在于在C内调和且连续到C上的函数u，u在C上的值与φ相同。在此基础上，黎曼得出共形映射的基本定

理：若单连通域D的边界多于一点，Z_0为D内一点，则存在唯一的单叶解析函数$\omega = f(z)$将D映为ω平面上的单位圆$|\omega|<1$，且满足$f(z_0)=0$，$f'(z_0)>0$。这个定理是复变函数论中几何理论的基础，今天称为黎曼映射定理。根据这个定理，对于单连通域内的解析函数常常可以化到单位圆内去研究。

由于解析函数在每点的邻域内可以展为幂级数，因此，幂级数是研究解析函数的有力工具。对幂级数，外尔斯特拉斯曾作了开创性的工作，彭加勒和沃尔泰拉等人也有重要的工作。

综观19世纪的复变函数论，主要研究的是解析函数，并形成三个研究方向：单值函数、多值函数以及几何理论。从19世纪后半期起，沿这三个方向发展。

单值函数中最基本的是整函数和亚纯函数两类，分别是多项式和有理函数的发展。外尔斯特拉斯将多项式的因式分解定理推广到整函数，瑞典的米塔·列夫勒又将有理函数分解为部分分式的定理推广到亚纯函数。É.皮卡和É.波雷尔等更进一步发现整函数的取值与多项式的取值之间有着很大的相似性。在此基础上，芬兰的奈望林纳于1925年建立了亚纯函数值分布的近代理论，对函数论的发展产生了重要影响。本世纪以来，在函数值的分布理论方面优秀成果很多。

多值函数主要是围绕黎曼曲面及单值化的问题进行的。H.外尔在其重要著作《黎曼曲面概念》（1913）中首次给出了抽象黎曼曲面的定义，这是流形这一现代数学基本概念的雏形。对黎曼曲面的研究，不仅使自身形成完美的理论，而且也为代数几何、自守函数、复流形、代数数论等数学分支提供了简明的模型。

在复变函数的应用上，共形映射具有重要地位。茹科夫斯基通过共形映射研究绕机翼的流动便是著名例子。单叶函数是复变函数几何理论的重要组成部分，特别是1916年由比勃巴赫提出的猜想引起人们的注意。这个猜想已于1984年由布朗基所证实。

复变函数论从一个变数推广到多个变数，就产生了多复变函数论（又称复分析）。在多变数时，其定义域的复杂性增加了，这时函数的性质较之单变数时也有显著的差异。

实变函数论 作为一个数学分支，它同古典微积分一样讨论实变函数。所谓实变函数主要指自变量（含多变量）取实值的函数。但是实变函数论所讨论的函数范围比之古典微积分广泛得多，并包括了微积分所讨论的函数。

19世纪上半期的微积分主要处理光滑曲线和可微函数（如初等函数）；复变函数论主要对象是解析函数，这类函数不仅无限次可导，而且还可展开成幂级数。但是在19世纪50年代前后，狄利克雷、外尔斯特拉斯等相继给出了被人称之为“病态函数”或“不好”的函数，破坏了古典微积分的优美。

为了使分析理论能适用于这些更为广泛的函数，必须对已有的微积分特别是其中的黎曼积分理论作出重大突破。完成这一历史任务的是法国的勒贝格。人们称勒贝格的积分论是积分学的一次革命。

这场革命是从通常的长度概念开始的。É.波雷尔首先提出测度思想，这是区间长度、矩形面积和长方形体积概念的推广。在É.波雷尔思想的影响下，勒贝格连续发表了两篇论文和一部专著：《积分，长度和面积》（1902）、《论三角级数》(1903)、《关于积分法和原函数研究讲义》（1904），提出了勒贝格积分理论，为实变函数论奠定了基础。

众所周知，微积分主要从连续性、可微性、黎曼可积性三个方面来讨论函数。如果说微积分所讨论的函数都是性质“良好”（如假设函数连续或分段连续等）的实变函数，那么，实变函数论则从连续性、可微性、可积性三个方面讨论更为广泛的实变函数，其中包括在微积分中所谓性质“不好”的函数，而它所得出的结论也适用于性质良好的函数。因此，可以说实变函数论是更

高层次的微积分。

函数的可积性是实变函数论中最主要的内容，它包括勒贝格的测度、可测集、可测函数和积分等。在函数的连续性方面，它讨论定义在直线的子集（不必是区间）上的函数的不连续点的特征，还讨论怎样的函数可以表示成连续函数序列处处收敛的极限等。在函数的可微性方面它引入了f(x)在x点的右方上（下）导数和左方上（下）导数四个概念。这四个数可以是有限的、也可以是无限的，当它们都相等且有限时，就是古典微积分中所说的f(x)在x处可导。

实变函数论的思想和方法已被应用于许多数学分支，特别对现代数学中的一般拓扑学和泛函分析有重要应用。

3.微分方程思想简述

微分方程是常微分方程与偏微分方程的总称。

常微分方程　在微积分中，已知y′=f(x)而求y就是解最简单的常微分方程。因此，常微分方程作为一个学科几乎和微积分同时产生；它的发展与力学、天文学、物理学以及其它科学技术的发展互相促进。数学其它分支的发展如复变函数论、李群、组合拓扑等都给它的发展以深刻的影响。近半个世纪以来，计算机的发展为它的应用和理论的研究提供了强有力的工具。它的发展大体上分成如下四个阶段。

第一阶段：18世纪及其以前是它的产生和初步发展阶段。质点动力学问题的研究是其主要来源之一。在这个阶段，和代数方程中人们默认根的存在，并集中力量寻求5次方程的根式解法类似，人们不仅默认解的存在，而且注意力集中于求通解，并取得一些成果，例如：莱布尼茨关于齐次方程和线性方程的通解，J.伯努里（1654—1705）提出并解决所谓伯努里方程的特殊非线性方程，欧拉等得到的常系数线性方程的通解等。但是，能求显式通解的方程毕竟有限，因此，求通解的努力经过一段时间后便停

滞下来。当时由于某些实际问题的需要，开始了用数值方法求近似解的工作。电子计算机出现以后，常微分方程的数值解法发展成一个重要分支。

第二阶段：在19世纪的初期和中期，是整个数学取得许多重大突破的时期，也是常微分方程在理论上取得重要成就的时期。这些成就是：微积分现代形式的奠基人、复变函数奠基人之一的柯西将常微分方程的研究由实数域扩展到复数域；并证明在方程右方是解析函数的条件下解的存在性和唯一性；由于对热传导和弦振动等实际问题的研究，出现了由斯图姆和刘维尔所开创的边值问题和特征值问题新的研究领域；同阿贝尔1824年证明五次方程无一般求根公式类似，1841年，刘维尔通过对黎卡提方程的研究，结束了一般常微分方程求通解的意图；同伽罗瓦1832年的工作相类似，1874年，S.李将李群概念用于常微分方程，引入了将解变为解的连续变换群的概念，当连续变换群已知时常微分方程的积分因子可写成显式，从而解决了解的可积性问题。

第三阶段：19世纪末期和20世纪初期，常微分方程的理论在三个方面取得重大进展，且都与彭加勒的工作相联系。其一，它的解析理论的研究。包括椭圆函数一般理论的建立，线性方程的理论，一阶非线性方程的理论，以及自守函数的理论等。这时期，组合拓扑和常微分方程也互相渗透，共同发展。其二，以彭加勒的工作为标志，常微分方程实域定性理论的创立。其特点是：由复域的研究又转到实域的研究，由函数的研究转到曲线的研究，由个别解的研究转到解的集体的研究，由解的解析性质的研究转到解所定义的积分曲线的拓扑性质的定性研究，由应用等式转到应用不等式。这一新分支包括奇点附近积分曲线的分布．极限环、奇点的大范围分布、环面上的积分曲线、以及三维空间周期解附近积分曲线的情形等。其三，由于天体力学，特别是“三体问题”的需要，彭加勒等关于摄动理论的创立。

第四阶段：从20世纪中期起，常微分方程继续向深、广发展，主要有如下四个方面：其一，由于工程技术等实际问题的需要而产生了一些新分支，如差分方程、泛函微分方程以及随机微分方程等。其二，虽然一般非线性问题得不到精确的解析形式的解，但由于实际问题又需要解析形式的解，于是人们退而求其近似解析形式的解。为此目的，不同的数学家创造了不同的方法，如PLK方法、WKB方法、KБM方法、多尺度法、匹配法、奇摄动法、区域分析法等。其三，由于电子计算机的产生与发展，使常微分方程产生了许多新成果，如数值求解法，数值模拟、机器推导等。其四，常微分方程的理论本身向高维、抽象化方向发展。这方面包括由普通空间常微分方程向抽象空间常微分方程的发展，由具体动力系统向抽象动力系统的发展，由实域定性理论向复域定性理论的发展，以及由二维平面上的一维积分曲线的研究向四维空间中的二维积分曲面的研究等。

偏微分方程 作为一门学科，它的形成和发展始终同物理学和其它自然科学的发展密切相关，互相推动。特别是在19世纪前半期，主要是物理学中的问题引导数学家应当讨论哪种类型的方程。在偏微分方程的历史上，其它的数学分支如分析学、几何学、代数学、拓扑学等的发展都给它以深刻的影响。

在18世纪，即微积分产生不久，人们就结合物理学的需要开始了偏微分方程的研究。最早研究的几个方程是弦振动方程、热传导方程和调和方程（又称拉普拉斯方程）。随着力学和物理学的发展，18世纪以来，连续介质力学、电磁理论、量子力学、引力理论、规范场论等方面的基本规律都可用偏微分方程表示，促进了它的发展。本世纪以来，又在力学、物理学、化学、生物学以至经济学、社会学等领域中不断归结出一些新的偏微分方程（组），对它们的研究对于了解相应学科中的运动规律非常重要。

在偏微分方程中，最简单的当然是一阶方程。一阶方程的求解问题已于19世纪初期被柯西、拉格朗日等所解决。基本方法是把求解一阶偏微分方程化归为一阶常微分方程。

二阶偏微分方程求解一般难以化归为常微分方程求解，自然地，首先注意力集中于有重要应用的特殊的二阶方程，如上述弦振动方程、热传导方程和调和方程等。尽管特殊，由于提法的不同而形成多种多样的定解问题。

在对上述特殊二阶方程充分研究的基础上，开始转向一般二阶线性方程。这类方程在平面的情形可表示为

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,\ y)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+F(x,y,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y})\ =0。$$

当B^2-AC在平面上某一区域R内处处为正、负和零时，分别称为R内的双曲型、椭圆型、抛物型方程。波动方程、调和方程、热传导方程分别是这三种类型的例子。关于三种物理方程定解问题的提法、解的性质以及求解方法，多半可以推广到三种类型的方程上去。

还有许多二阶线性方程并不属于双曲、椭圆、抛物三类型中之一种。比如，有的方程在R内的某一子域内是椭圆型的，而在R内的另一子域则又是双曲型的，这类方程称为混合型的。本世纪以来，对混合型方程也有许多研究，这类方程也有许多应用。

将偏微分方程由二元推广到多元，由二阶推广到高阶，由线性推广到非线性，以及由常系数推广到变系数，情况都比较复杂，在本世纪以来都有许多重要成就。总的来说，对于非线性方程的研究，尚未形成一个统一的理论，还没有一种普遍适用的方法。因此，在实际应用中，有时用线性方程近似地表示非线性方程；但不是所有非线性方程都可用线性方程代替的，这时就常常

借助电子计算机进行数值计算来求解，这对许多问题也能取得相当准确的结果。

4.泛函分析思想简述

泛函分析是研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件的映射的学科。也可以说，它是运用几何学、代数学的观点和方法研究分析课题的学科，可以看成无限维的分析学。泛函分析是20世纪一门最具综合性的基础学科，应用极为广泛，它的产生与发展大致经过如下三个阶段。

第一阶段：从19世纪80年代到20世纪的前20年是它的酝酿和创始时期。同科学史上一切新科学的产生一样，它的产生有一定历史必然性。这种必然性主要来自数学内部。

如前所述，数学的主要分支在19世纪都得到充分的发展。但是这些分支本质上都是互相独立的，很少联系。因此，用高层次的、统一的观点来理解各分支的某些问题就成为必然的了。泛函分析的许多重要概念就是从变分法、微分方程、积分方程、函数论等学科中某些问题的研究中发展而来的。例如，变分法的核心问题是讨论形如$J[y]=\int_a^b F(x, y, y')dx$的积分的极值。这里$y$是$x$的某个函数，而$J[y]$又是$y$的函数。在其它学科中也有类似的情况。法国的阿达马首次给这种函数的函数$J[y]$冠以“泛函”的名称。阿达马的学生弗雷歇的博士论文（1906）发展了老师的有关思想：用抽象的形式表达函数空间，把通常的函数（或曲线）看成空间中的点，在此基础上推广了通常点列极限概念，定义了泛函及泛函的连续性等。

同弗雷歇的工作大致同时，希尔伯特受瑞典弗雷德霍姆等人研究积分方程所取得成就的鼓舞，于1904～1906年间，完成六篇有关方面的论文，取得了许多重要成果，如给出所谓的希尔伯特谱论，引入无限维（实）欧几里得空间l^2（平方可和序列空

间），提出了l^2上有界双线形式、有界线性形式以及强弱两种收敛概念，给出了l^2上的选择原理，还发现连续谱的存在性等。希尔伯特的工作意味着用代数方法来研究分析中的课题是很自然的。希尔伯特的学生施密特发展了老师的谱论。他在1908年的论文中已使用复l^2、内积和范数符号，给出了正交、闭集、向量子空间的定义，证明了在闭向量子空间上投影的存在性。这些工作表明几何观点已进人泛函分析。

1902年，勒贝格积分理论的产生加速了泛函分析的产生。1907年，匈牙利的里斯等引入勒贝格L^2空间（平方可积函数空间)概念。两个月之后，德国的菲舍尔与里斯独立地证明L^2与l^2同构。里斯-菲舍尔定理表明积分理论与泛函之间的紧密联系。1910年，里斯又研究了L^p空间（p次方可积函数全体构成的空间，$1<p<\infty$)，发现L^p上连续线性泛函全体构成一个对偶空间L^q（$p+q=1$）。这些空间是研究偏微分方程的重要工具。

第二阶段：从20世纪20年代到40年代的两次世界大战期间是它的定型时期。

当许多具体的无限维空间以及它们上面相应的收敛性出现之后，抽象线性空间以及按范数收敛的产生就成为自然的了。1922～1923年，哈恩、维纳和巴拿赫都独立地引入赋范线性空间。当时的讨论事实上都限于完备的赋范线性空间。1927与1929年，哈恩与巴拿赫分别独立地证明了这种空间上泛函延拓定理，并引入赋范线性空间E的对偶空间E^*。巴拿赫的《线性算子理论》(1931)是集中反映当时主要成果的第一部经典著作。该书标志着完备赋范线性空间理论的独立体系已经基本完成。为了纪念他的功绩，今天把完备赋范线性空间称为巴拿赫空间。巴拿赫空间的几何学是近年来人们感兴趣的领域。

1926年，冯·诺伊曼作为希尔伯特的助手来到哥廷根大学。这时正是量子力学大发展的年代，不断出现新的思想，要求合适

的数学工具。为了给量子力学提供严格的数学基础，冯·诺伊曼于1929～1932年正式引入并定名抽象的（即现在的）希尔伯特空间概念。鉴于物理学中可观察的量以及奇异积分方程、微分方程中出现的重要算子都是无界的，他引入稠定闭算子概念。他还给出了无界自共轭算子的谱分解，证明了量子力学中交换关系的表示在酉等价意义下是唯一的等等。

巴拿赫的《线性算子理论》一书的问世和冯·诺伊曼的谱理论的出现，标志着泛函分析作为独立的数学分支的诞生。在它形成的过程中，每个成果都伴随着它在其它领域中有价值的应用，特别是量子物理学的发展对泛函分析的形成所起的作用，犹如古典物理学的发展对17、18世纪微积分的产生和发展所起的作用一样。

泛函分析在20世纪30年代成果累累。在巴拿赫代数方面有1935年建立的冯·诺伊曼代数（即ω^*代数），以及1941年出现的盖尔范德代数（即C^*代数）等。在拓扑线性空间方面，有1935年产生的勒雷-绍德尔的不动点定理等。在广义函数论方面，索伯列夫于1936年引入了广义导数（后人称为索伯列夫导数）等。

第三阶段：从40年代起，是泛函分析发展、成熟阶段。

继索伯列夫导数之后，随着拓扑线性空间理论以及调和分析理论的发展，于1945年产生了施瓦尔茨的分布论即广义函数论。该理论把已有的函数概念又提高到一个新的层次，并把这方面的成就汇成了统一和完整的理论。它一出现，就有力地推动着偏微分方程的发展（例如，50年代末出现赫尔曼德尔的叶理论，60年代出现的伪微分算子理论和傅里叶算子理论等）使偏微分方程的研究出现了新局面。

40年代以前的泛函分析，除个别定理（如不动点定理）和变分法中的$J[y]$之外，一般属于线性部分。相对而言，线性部分研究得也比较充分。但是在实际中，非线性问题远比线性问题

多，其难度也比较大。在线性问题取得一定成就之基础上，人们的注意力自然地就转入非线性问题的研究，并逐渐形成了在应用上具有一定广泛性的泛函分析的非线性理论。例如：近似解理论、单调算子理论、隐函数理论、拓扑度理论、分歧理论等等。随着现代微分几何学、拓扑学和大范围分析的发展，非线性泛函分析将有广阔的前景。

3.6 计算机的产生、发展及其意义

1.先驱者的足迹

计数是人类社会生活不可缺少的一个方面。要计数就得有计数的工具。例如：幼儿常用手指头计数，中小学生用笔和纸计数，技术员用计算尺计数，售货员用算盘计数等。这些是在17世纪以前的漫长岁月中人们所使用的计算工具的一个缩影。

在人类的历史上，对计算工具第一次作出重要改革的是法国数学家帕斯卡。他的父亲是银行会计。父亲繁重的计算工作促使帕斯卡立志设计一种计算机械。1642年，他发明了一种能作加（减）法的计算机，并应用于税收，据说效果不错。帕斯卡意识到它的深远意义，他在《沉思录》中说："这种算术器所进行的工作，比动物的行为更接近人类的思维。"① 帕斯卡的计算机引起不少人的兴趣，其中最著名的是莱布尼茨。

1694年，莱布尼茨在帕斯卡计算机的基础上制造了一种可以作加、减、乘、除四则运算的计算机。他对逻辑、数学、计算机三者的认识都出于他的思维机器化的思想。为了达到这个目的，他要建立思维演算和普遍的符号语言，这是今天数理逻辑中形式

① 转引自中国科学院近现代史研究室：《20世纪科学技术简史》，科学出版社1985年版，第269页。

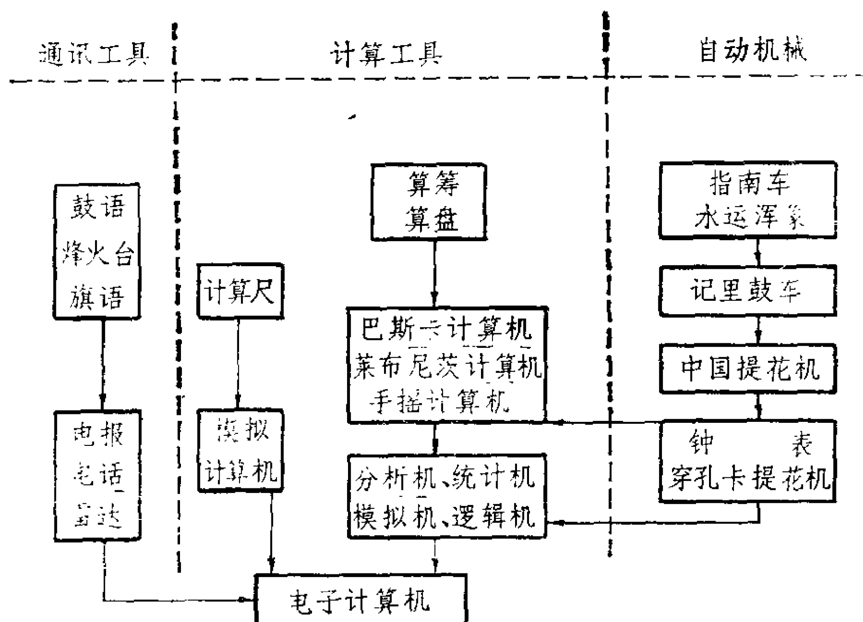
语言和现代程序语言的渊源。莱布尼茨另一个贡献是提出系统的二进制算术运算法则。他认为世界上最早的二进制是中国的八卦。

17世纪末期，在科学家中形成一股研制计算机的热潮，但是由于技术条件的限制，直到19世纪初期，才出现有实用价值的台式手摇计算机。

上述计算机都没有自动计算的功能。英国的巴贝治是第一个研制自动计算机的数学家。当巴贝治还是个大学生时，就发现英国曾耗费不少人力所编制的航海表中有许多错误，这种错误自然要影响航海定位的准确性。为了把人类从简单而又繁琐易错的计算中解脱出来，他于1822年制造了一台可以运转的差分机模型，并且有秩序设计的萌芽。不久，他受法国雅卡尔发明提花机的启发，于1834—1835年设计了一架"分析机"。它已具备了现代计算机的主要特点，是用程序控制的（由蒸汽机驱动）自动计算机。由于设计复杂，当时的技术难于实现，更由于那时的英国社会还没有这种需要，因而未能制造。

巴贝治之后，研制大型数学计算机的工作停滞了大约70年。直到1937年，美国哈佛大学的艾肯由于撰写博士论文时遇到非线性常微分方程求近似解，很费时间，于1940年，研制了一台被命名为MK.Ⅰ的计算机，它部分地采用继电器，主要用于科学计算。1946年，艾肯又制造了一台全部使用继电器的MK.Ⅱ。艾肯的计算机只是部分地实现了巴贝治的设计思想。继电器计算机很快过时，它在历史上只是短暂的一幕；是从手摇计算机到电子计算机的过渡环节。

除了上述计算工具的发展为电子计算机的诞生作了必要的准备之外，通讯技术和自动机械的发展也为它的产生作了准备。为了节省篇幅，我们略去对后两者的叙述，仅将电子计算机的历史渊源列表如下页：



电子计算机的历史渊源

2.计算机的革命——ENIAC和EDVAC的产生

第二次世界大战期间，美国宾夕尼亚大学的莫尔学院电工系同美国陆军的阿伯丁弹道研究实验室共同负责每天为海陆军提供六张火力表，每张表要计算几百条弹道。任务繁重而时间性又强。为了完成任务，该学院的物理学家莫希利于1942年8月提出一个题为《高速电子管计算装置的使用》的报告。经过争取，于1943年4月被批准，6月开始试制。总工程师是24岁的硕士生埃克特。

1944年夏，冯·诺伊曼正在参加第一颗原子弹的研制工作，它遇到使人头痛的数十亿次的初等算术运算。因此，当他闻讯莫尔小组的工作后，立即决定同他们合作，并协助解决了一些关键问题。这项工作于1945年底宣告结束，1946年2月15日交付使用。一般认为，这是世界上第一台电子计算机（定名为ENIAC）。它每秒可作5000次加法、500次乘法或50次除法，比当时已有计算机快1000倍。它的产生，是计算机历史性的变革。

ENIAC用18000个电子管、7万个电阻、1万个开关，体

长30米、高3米、宽1米、重30吨，占地167平方米，可谓庞然大物。工作时常因烧坏一个电子管不得不停机检修。更主要的问题是：（1）存储容量太小，至多只能存20个字长为10位的十进数字；（2）它的程序是“外插型”的，为了进行几分钟的运算，准备时间需要几个小时甚至几天时间，使用不便。

遗憾的是，在ENIAC还未正式运行之前，研制组内部发生矛盾，主要成员分道扬镳。莫希利和埃克特另建了一个公司，研制UNIVAC计算机；冯·诺伊曼去了普林斯顿，主持制定了一个全新的电子计算机EDVAC的方案。

EDVAC克服了上述ENIAC的两个主要缺陷，更主要是它能程序内存。由于程序内存，才使计算机具备了某些“思维”性质的功能。一般认为，冯·诺伊曼这个方案的提出揭开了信息时代的序幕。尽管EDVAC1952年才制造出来，但是它的影响很大，各国都按其方案仿制。据统计，到1950年，全世界已有15台同类计算机运行。人们称这类计算机为冯·诺伊曼机。

EDVAC方案是冯·诺伊曼主持制定的，体现了他的设计思想，但是并不等于说这个方案的最大特点——程序内存的思想是他首次提出的。这一思想的首次提出者是英国数学家图林。

多少世纪以来，人们都在学习计算、进行计算，但是究竟什么是计算？在1936年以前从未有人对计算进行过实质性的思考。图林的经典性论文《论可计算数及其对判定问题的应用》(1936—1937）首次对计算的本质进行了深刻的分析。他用抽象分析法，舍弃计算时所使用的工具、符号等同实质无关的因素，发现一切计算过程都具有“线性”的性质，即：使用长带子上成串的符号0和1，执行下列各种指令：（1）写上符号0，（2）写上符号1，（3）向左移一格，（4）向右移一格，（5）观察现在扫描的符号并相应选择下一个步骤，（6）停止。计算者执行的程序，也就是这类指令所排列成的表。这是一个实现计算过程的

数学模型。这个模型就是后来科技文献中所说的图林机。它是在不考虑硬件的条件下，对可计算问题的逻辑描述。图林机是程序内存的，且主要由三部分组成：一条带子、一个读写头、一个控制装置。图林机理论表明：一切可计算问题都可机械地进行，因此，通用计算机是可以制造出的。上世纪的巴贝治虽然设计了计算机，但并没有从理论上证明是可行的。

上述图林论文为通用计算机提供了理论基础，引起普遍的重视。1939年，图林受聘于英国外交部通讯处。这一年，第二次世界大战全面爆发，英伦三岛经常受到空袭的威胁。希特勒用于绝密通讯的电报机是Enigma（谜）。为了破译这种密码，图林利用计算机理论设计了一台名为Ultra（超越）的机器，破译了德国很多绝密通讯，为保卫英伦三岛立了汗马功劳，并因此而获得英国勋章。但这一工作长期保密，直至70年代才有所透露。因此，世界上第一台电子计算机是不是ENIAC，现在还不能完全肯定。

3.现代计算机的演变

ENIAC开辟了计算机的新纪元，EDVAC为现代计算机奠定了基础之后，计算机发展极为迅速，并经历了几次重大变化，这就是一般常说的第一、二、三、四代计算机。

第一代计算机（约1946～1958）主要用电子管作逻辑元件。由于存储技术还不成熟，所以第一代计算机用不同的存储器：有的用汞延迟线，有的用静电管和磁鼓，也有的用磁芯等。1951年，美国用它处理了1950年全国人口普查资料；1957年，苏联用它把第一颗人造地环卫星送上了天。

第二代计算机（约1959～1964）以晶体管作逻辑元件和以快速磁芯为存储器。它的速度由第一代的数千次提高到数十万次。主存储容量从原来的几千字提高到十万字。其体积、功耗和售价比之第一代均大幅度降低。

第三代计算机（约1965～1970）最突出的特点是使用集成电路（少数也有例外）。它的速度和存储量比之第二代又提高了一个多数量级，分别达到每秒千万次和几百个K字（1K＝1024）。通用性提高且价格大幅度下降，有力地推动了计算机的普及。

第四代计算机（70年代以来）同第三代之间没有明显的区分标志。一般认为第四代的主要标志是使用大规模集成电路作为逻辑元件和存储器。进入第四代后，最突出的情况是向微型化和巨型化两个方向发展。微型机的大批生产和应用远远超出单纯计算，它深刻地影响到工农业生产、科研、办公室、家庭等各个领域。巨型机的发展在70年代也令人瞩目。比如，计算速度一般都在1.5亿～2.5亿次，80年代又有提高。据报道，日本于1990年初，已研制出每秒5亿次的神经计算机。①

80年代一开始，日、美等发达国家，拨出巨额资金，投入大量人力，着手研制第五代计算机。它的性能在根本上与前四代计算机不同，而是以人工智能为基础的非冯·诺伊曼机。一般的设想是②：第五代计算机将有处理自然语言的能力，用户可以直接用口述、手写（英、日语）或图表等与机器通讯；将是有具备学习和归纳能力的专家系统；将使用超高级语言，用户只须在程序中规定作什么，而不必规定怎么做；将是面向数据库的机器，用人工智能技术提供数据库与用户之间的接口；它也将是功能分散的系统。人们密切地注视它的研制动态。

现代计算机从1946年至今不到50年的历史，其间已经发生几次重大变革。近十几年比之刚开始的30年，突破性的成就相对减少，也许这是酝酿重大突破的前夜。

在现代计算机发展的历史中，“随着其它科学技术领域的进

---

① 参见1991年1月4日《科技日报》。

② 参见中国科学院近现代史研究室：《20世纪科学技术简史》，第280页。

步，计算机有了不断更新的硬件技术，使冯·诺伊曼-图林的思想得到充分的实现。其充分程度达到使人认为这种思想已经成为计算机发展中的障碍，而不能不对之有所突破”①。在硬件方面，已有人预言，硅的时代就要过去了，计算机的器件将有新的重大突破。如何突破冯·诺伊曼-图林的思想，这是数学家的历史责任，现在已有人提出一些方案。一旦第五代计算机的研制取得重大突破，其意义将远远超过前几代计算机。

4.现代计算机的意义

ENIAC与EDVAC的产生揭开了信息时代的序幕。所谓信息时代就是用物质装置（主要是计算机主机及其外围设备）代替原来由人从事的信息加工的时代。所以，信息时代就是信息加工时代或计算机化的时代。信息时代是整个人类文明继农业时代、工业时代之后的崭新时代。如果说前两个时代分别以农业和工业生产为主要特征，信息时代则以信息加工为主要特征。计算机的产生，不仅是本世纪伟大的发明之一，而且也是迄今为止人类历史上最广泛、最深刻的技术革命。它的发展，对一些发达国家，已经在经济、政治、法律、教育、心理、科学、技术以及哲学等方面产生了巨大的影响。

恩格斯曾经指出：“没有一只猿手曾经制造过一把哪怕是最粗笨的石刀。”②正是由于有意识的制造工具和使用工具，才使人从动物中提升出来，有了人和人类社会。人类任何一件生产工具都是劳动器官——手的延伸；劳动工具的发展，表明人类征服自然能力的提高。以后显微镜、望远镜、雷达、电话、广播、遥感遥测、电视等，则是人的感觉器官——眼和耳的延伸，使人逐

① 胡世华：《信息时代的数学》，载《数学进展》1988年第1期，第12—20页。

② 恩格斯：《自然辩证法》，第150页。

渐实现了传说中的“千里眼”和“顺风耳”。这些仪器和设备之产生，使古代思辨性科学进入了实验科学或现代科学；它们的发展，直接关系现代科学的发展；它们的发展水平，是现代科学技术发展水平重要的物质标志。现代计算机的产生则是人的思维器官——大脑的延伸。由于它能作高速度的运算，能作严格的逻辑证明，能自动控制生产过程，能作综合分析、选择最优方案，能够作科技文献的翻译，还能贮存大量的文献资料等等，所以在现代社会的各个方面都有它的踪迹。因此，作为人的思维器官——大脑之延伸的现代计算机的产生，其意义将超过人的劳动器官和感觉器官的延伸。

科学的发展，特别是新学科的产生，总是同当时社会的物质设备有着密切的联系。有了显微镜，才会产生微生物学和细胞学；有了望远镜和射电望远镜，才有现代天文学和射电天文学。同样，随着电子计算机的产生与发展，也产生了一些崭新的科学部门，诸如自动控制、辅助设计、计算物理、信息处理等等，并引起一系列技术革新。现代，一个国家计算机发展水平也是这个国家科学技术发展水平的重要的标志。

现代计算机，因为能作高速度的运算，从而大大地缩短了计算时间，因此能把过去实际上不可能的问题变为可能，解决了科学技术部门中过去无法解决的问题，促进这些部门的发展。计算机对于今天和今后的科学家，将同显微镜对于生物学家、望远镜对于天文学家一样是不可缺少的工具。计算机的使用，使数学研究由以往的“手工业时代”进入到“大工业时代”，也使科学研究由以往的“手工业时代”进入到“大工业时代”。

计算机的产生也是数学发展的产物；莱布尼茨、图林、冯·诺伊曼的思想和他们后继者的纯数学研究成果，一直是本世纪80年代以前计算机科学技术发展的指导原则。另一方面，计算机的发展又深刻地影响数学的发展。信息时代绝不会由于计算机具有某

些“思维”功能而缩小数学阵地，而是相反。信息时代的数学，除了传统意义下的数学研究之外，还需要大量具有一定数学知识和数学训练的人从事信息加工的工作以及各种软件工作。由于计算机的普及，更由于由信息时代对数学的需求，整个数学教育的体系、结构和内容也将要调整。

我国数学家胡世华认为，在信息时代，构造性数学和非构造性数学都很重要，都很根本，他认为二者“都需要以空前的规模来发展”；对连续数学和离散数学都应同样受到重视，“决不能以削弱一种数学的办法来加强另一种数学”。① 这一见解值得重视。

计算机能够模拟人脑的一部分活动（如数字计算和逻辑推理等），随着时间的推移，人类将愈来愈多地掌握人脑活动的规律，所以计算机能模拟人脑的地方将越来越多。但是，这绝不是说，终有一天，计算机完全可以代替人脑，甚至超过人、征服人。人脑有其长处和短处，计算机也有其长处和短处。任何工具、仪器、机器，都不过是人的经验和智慧的物化，计算机也不例外。从其一个侧面来说，计算机的能力大得惊人，使人望洋兴叹。但是，它的运算速度不管如何高，它的“智慧”不管如何强，这些毕竟是人给的，它是由人制造的，它的最后操纵者是人。它在某些方面比人的能力大，这同起重机比人的臂力大、载重车比人的拉力大的性质一样，不能因此而得出它将征服人的结论。若从综合能力来说，任何时候，它都不能和人脑相比。比如，计算机不会猜谜语，因为谜面同谜底之间的关系很复杂，不能形式化，从而不可能用它来解。再如，计算机没有感性功能，没有灵感，因此，它永远不会进行文学创作，不会把“草”变成“牛奶”。数

---

① 胡世华：《信息时代的数学》，载《数学与文化》，北京大学出版社1990年版，第268页。

学家可以发现一个新定理，天文学家、物理学家可以发现一个新天体、新物质，这些，计算机永远办不到。科学的进步使计算机“智慧”同步提高，但它将永远跟在人脑的后边，不可能超越。

第四章　现代部分(二)——数学基础和数学哲学简介

4.1 绪　论

1.数学基础和数学哲学的区别和联系

简单地说，数学基础是从事数学奠基的数学研究。数学基础研究者，首先是根据他们的数学观对数学中的重要问题（如：什么是数学，什么是数学真理以及什么是数学的基础等）作出回答；然后再根据其回答，为数学奠定一个坚实可靠的基础，使数学立于不败之地（比如避免悖论等）。也就是说，数学基础所要解决的问题是数学的可靠性问题，因此，它是数学研究，属于数学范畴。

数学哲学，简单地说就是对数学作哲学分析，或者说是研究数学中的哲学问题。这种回答固然简练，但过于一般，近似“同义反复”，没有给人们提供多少有用的信息。于是有的学者提出，“数学哲学是研究数学的对象、性质、方法等方面的本体论、认识论、方法论以及其它诸问题的”①。不管如何表述，对数学中的重大问题作本体论、认识论和方法论的分析是数学哲学的中心内容。因此，数学哲学属于哲学范畴。

可见，数学基础和数学哲学的区别是明显的。但是另一方

---

① 林夏水：《数学哲学的对象和范围》，载《自然辩证法研究》1988年第3期，第33页。

面，二者之间的联系历来十分密切。因为要解决数学基础问题，必然涉及数学家的数学观和哲学立场，哲学立场不同就得出截然不同的解决数学基础的方案。同时数学哲学中所涉及的数学问题，主要也是数学基础的研究中所涉及的问题。正因为如此，长期以来人们就把它们放在一起讨论；数学哲学的历史实际上也是数学基础的历史。从基本倾向而言，在古代希腊时期，数学基础以数学哲学的形式出现；在18世纪，特别是本世纪的前40年，数学哲学又以数学基础的形式出现。

2.数学基础和数学哲学的历史和现状

数学基础问题虽然在古希腊和18世纪时遇到，但是这个问题被明确地提了出来并加以认真、深入的研究则是本世纪初期的事情。因为从19世纪90年代开始，由于集合论出现悖论，西方数学界宣布数学基础产生了危机。为了克服这一危机，一些数学家从各自的哲学立场出发，提出了解决这一危机的不同方案，形成了不同的学派。这些学派之间互相争论、批判，把数学基础的研究推向高潮，被称为数学基础研究的“黄金时代”（鲁宾逊语）。由于各学派的目标都没有达到，所以从40年代开始，正如匈牙利的卡尔马所说，数学基础的研究“现在几乎是处在一个悲观的停滞期、枯萎期”①。他认为提出如下的问题是适时的：“数学基础——今天何方？”他说：“不用怀疑，人们会继续走现有的探索途径，而且可以得到新的有意义的结果。不过，我不认为这样就能枯木逢春。”②实际是说，现在是应当改变数学基础的研究方向的时候了。数学基础问题值不值得继续研究？对此，现在的多数人持否定态度。

---

① L.卡尔马：《数学基础——今在何方？》，载《数学哲学译文集》，商务印书馆1988年版，第32页。

② 同上书，第33页。

数学哲学问题提出得很早。从毕达哥拉斯和柏拉图开始，中间经过康德和黑格尔，直到马克思和恩格斯等著名哲学家，都对数学哲学问题进行过相当充分的研究。但是在19世纪末期以前，哲学家研究数学哲学都是为他们的哲学观点、哲学体系服务的，也就是说，在这些著名哲学家那里，数学哲学从属于他们的哲学。这是数学哲学的第一个时期——附属于哲学时期。

大致在1890～1940的50年内，数学哲学以数学基础的形式出现。日本1954年出版的《数学百科全书》（日本数学会编）、1972年美国出版的《哲学百科全书》、德国1975年出版的《简明数学百科全书》以及1980年第15版《大英百科全书》等，都只设“数学基础”条目，数学哲学的内容包含于其中。这是本世纪上半期数学哲学真实历史的反映。因此，本世纪上半期是数学哲学的第二个时期——以数学基础为中心的时期。

在我国自然辩证法学界1956年制订的《自然辩证法（数学和自然科学中的哲学问题）12年（1956～1967）研究规划草案》中，把数学中的哲学问题同物理学、化学、天文学、生物学、医学和心理学等学科中的哲学问题并列，并都从属于自然辩证法即科学哲学。数学哲学应不应该属于科学哲学呢？见仁见智。现在实际的做法是归入科学哲学的（例如，我国数学哲学会是全国自然辩证法学会的一个分会）。对此，有的学者提出不同意见。理由是：因为数学不属于自然科学，从而研究数学中哲学问题的数学哲学就不应属于研究自然科学中哲学问题的科学哲学。①

在本世纪上半期数学基础研究的黄金时期内，数学基础研究中的三大学派尽管都作出了巨大的努力，但是其目标都没有实现。作为对这一时代工作失败后从总体上的反思，人们普遍地对

---

① 参见林夏水：《数学哲学的对象和范围》，载《自然辩证法研究》1988年第3期，第32页。

数学基础研究的方向产生了怀疑和否定。然而从40年代以来，数学的迅猛发展却是一个客观事实，这使数学家对数学本身问题的考虑远远超过了对其基础和相容性的考虑。只要数学本身取得重大发展，则对其所取得的成就作哲学分析就不可能停顿下来，这可能预示着数学哲学研究即将进入一个新的时期。在这一时期，数学哲学有可能也有必要成为一门独立的学科。该学科的内容，除了在更高的层次上研究第一时期的主要论题（如数学的本体论和认识论等）外，还将吸收科学哲学中某些思想方法，数学方法论也将成为它的组成部分。

这一章主要对下面五个问题上的一些主要观点作简略述评。这五个问题是：数学基础、数学本体论、数学理论的真理性、数学中的悖论、数学方法论。

3.数学性质问题

数学的性质是数学哲学中重要问题之一。从认识论的角度来说，数学到底是怎样产生的（是经验的，还是先验的）？以及产生后是如何发展的（是依靠实践的推动，还是依靠逻辑的力量）？从本体论来说，数学是客观的还是主观的？或者说数学是一门经验的科学，还是一门先验的科学？从方法论来说，数学是归纳的，还是演绎的？对这些问题的讨论常常表现为对数学性质的讨论，且在历史上各个时期的主要倾向并不完全一样。

17世纪以前，尽管数学中有毕达哥拉斯学派和柏拉图的先验主义，也有笛卡尔和莱布尼茨的唯理主义，但在这一历史时期，数学的主要成就是算术、几何、代数，即通常所说的初等数学。几何起源于测量土地，算术和代数产生于计算。它们的发展，在客观上或是同某些社会的需要、或是同某种自然科学或某种技术的需要相联系，直接或间接表现了数学同社会实践的紧密联系。这个时期内的卓越数学家往往一身数任，他们或为某方面的自然科学家（天文学家、力学家和物理学家等）或为工程技术人员。

可见，这一时期的数学是在社会实践的基础上产生，并依靠社会实践的推动而发展。所以，总的来说，这时的数学是一门经验科学。对此，现代西方数学界也不否认。

笛卡尔的解析几何学以及牛顿和莱布尼茨微积分的产生，使数学的发展进入新的历史期即变量数学时期。牛顿和莱布尼茨的微积分，尽管因其有严重的缺陷而受到不少人的怀疑，但是在整个18世纪，由于它在解决实际问题中表现了强大的威力使自然科学家爱不释手；人们只是寻求对它的合理解释，给它奠定一个坚实的基础，而不是因其不合逻辑而把它抛弃，所以在18世纪，经验论的观点在数学中仍然是主要的观点。

19世纪，数学发生了更为深刻的变化：非欧几何学、群论、复变函数论、黎曼空间、多维几何、集合论等相继产生了，这些重要的数学概念和数学分支，没有一个是从现实世界中直接抽象出来的，更不是直接来源于“测量”，而是依靠抽象和逻辑力量发展出来的。在方法论上，以希尔伯特的《几何基础》(1899)的出版为标志，形成了典型的数学公理法，数学的许多部门如抽象代数、拓扑空间等都用公理方法建立它们的体系，甚至像概率论这样同实际的联系比较紧密的数学分支，也只有用公理方法叙述以后，它的基础才被认为是稳固的。所以，从19世纪初期到本世纪初期的一百余年的时间里，演绎法成为数学发展的主流，数学发展表现为一系列的逻辑推理，数学的成果如果没有严密的逻辑论证是得不到数学界的承认的。因此，许多数学家认为，数学是一门演绎科学，把数学看成经验科学的观点这时就显得无足轻重了。

在本世纪初期的数学基础研究中，三大学派之间激烈争论的本身，以及他们为数学奠基方案的失败，说明各派数学观的片面性。1931年，哥德尔不完全性定理的发表，用数学定理的形式证明了逻辑主义和希尔伯特改造数学的方案无法实现，而作为数学

理论基础的集合论，它的相容性也只是一个经验事实。就认识论而言，数学中由来已久且有广泛影响的先验论受到挑战。于是，在现代数学哲学中便兴起了以反对先验论为特征的经验论的思潮。

现代经验论既同以穆勒为代表的传统经验论有某种近似，而又同其有重大区别。按穆勒的观点，数学中大部分命题都是来自对经验事实的归纳，而现代经验论按莱曼的解释，数学命题并非穆勒所说的归纳，而是一种“受经验支持的理论命题”。

普特南在认识论上持经验论的立场，这同他在本体论上持实在论立场相一致。比如他说：“数学知识是与经验知识相类似的，即数学的真理标准与物理学一样，也在于我们的思想在实践活动中的成功性，而且，数学知识并非绝对的，而是可以修正的。”① 他明确地说：“大部分数学是经验的”，数学“依赖于经验和拟经验的论证。”②

数学的拟经验性是现代数学哲学的重要思潮，而“拟经验”概念，不同数学家有不同的理解。一般来说，它是指数学真理不仅依赖于经验的检验，而且也依赖数学活动的检验。拉卡托斯把波普尔证伪主义推广到数学，发展出一种独特的拟经验的数学观，按照这种观点，数学命题并不是什么先验真理，而本质上都是大胆的猜想，对此只能证伪，而不可能证实。③ 他的拟经验虽不同于我们通常所说的经验，但是人们仍把这种数学观之兴起归之于现代数学哲学中经验主义的思潮。

相对于普特南的经验论和拉卡托斯的拟经验论，卡尔马的观

---

① 普特南：《数学、物质和方法》，1974年英文版，第61页。

② 同上书，第77页。

③ “证伪”同“证实”是对立的概念，是波普尔理论的支柱。波普尔认为，科学中的命题都有普遍性，从而不能通过有限的事实、不能用归纳法去证实。但是反过来，普遍性命题可以用个别事实证明该命题不成立，即证伪。

点更加显明、彻底。比如他在1965年的一次国际数学会议上的报告中说：“我们必须正视几个事实。第一，从事数学基础的探索至今仍是基于数学是一门纯演绎科学的假定，出于我们将表明它是一门基础牢固的纯演绎科学的希望。第二，这个希望事实从未实现。……第三，我们的大多数形式系统的协调性是一个经验事实；甚至协调性已被证明的场合，证明中所用的元数学方法的可接受性也还是一个经验事实。”① 他又说：“许多体面的科学并不自称是‘纯演绎科学’，也有极好的名声。宣布数学是一门有经验根据的科学，并不排斥用演绎法，因为其它许多经验科学也成功地运用着这个方法！”②

在数学高度抽象、高度发展的今天，经验主义思潮的兴起，特别是卡尔马的思想已引起数学界的广泛注意。

我国数学哲学界一般认为，就认识论而言，数学归根到底起源于经验，任何时候，它的发展主流总是同物质世界直接或间接联系的；就方法论而言，经验的材料是用演绎法叙述的，随着数学的发展，它的抽象性越高，演绎法对它就越显得重要。

4.2 数学基础问题

数学基础是本世纪初期空前活跃的研究方向。这时的数学基础，主要研究纯数学的研究对象、数学中的逻辑（包括纯数学的形式化、数学系统的一致性以及数学命题的判定等方面的问题）和数学理论的真理性等问题。由于数学基础学家的哲学立场不同，所以对这些问题的回答也就不同，形成了数学基础研究中的不同学派。

---

① 卡尔马：《数学基础——今在何方？》，载《数理哲学译文集》，第33页。

② 同上书，第33—34页。

1.数学基础的历史回顾

尽管现代数学是一个体系庞大、分支众多的学科群，但它们都是“数”和“形”两个概念繁衍的结果，因此，数和形是整个现代数学的两块基石。这就决定了在历史上数学基础是围绕数和形两个基本概念而发展，并产生了两个方向：几何的方向和算术的方向。当然，这样的区分只有相对的意义。

（1）几何方向——从实体公理化到形式公理化。

在古希腊，几何学是数学的同义语。欧几里得的《几何原本》把465个定理按照逻辑顺序排列，逻辑的最后依据是定义和公理（包括公设）。所以定义和公理既是当时几何学的基础，也是当时数学的基础。

在相当长的时期里，人们对《几何原本》的严格性是相信不疑的。但是严格性是相对的。人们逐渐发现，在这个体系中，没有最基本的概念，有的定义含混不清，有的定义和公理是多余的，而又缺乏某些必需的公理等。因此，它的许多命题的证明并不严格。尤其是19世纪初期，柯西等对微积分奠基工作基本完成以后，几何学的逻辑相形见绌。于是从19世纪中期开始，几何学家开始了几何基础的研究。1899年，希尔伯特《几何基础》一书的出版，标志这一工作的完成。该书首先提出了三个基本概念（点、线、面）和三个基本关系（结合、顺序、合同），接着又提出了20个公理，并按其性质分成五组，其余所有概念和命题均作为这些概念和公理的直接和间接的逻辑结果。所以6个基本概念和20个公理是几何的基础。

《几何原本》和《几何基础》虽然都是用公理方法建立的，但二者却有本质的区别，属不同的层次。我国有关专家把前者称为实体公理化，后者称形式公理化。希尔伯特几何公理化的思想对现代数学影响很大。普遍认为，一个数学分支如果能用公理方法叙述，那么它的基础不仅清楚了而且也稳固了。所以从此开

始，许多数学部门都先后用公理方法叙述，形成公理化的热潮。人们认为，公理方法的使用，是现代数学重要特征之一。

（2）算术方向——从有理数到实数连续统。

在数学的历史上曾经出现三次数学危机。三次危机都同以什么作为数学的基础有直接的关系。毕达哥拉斯学派把数看成万物的本原，自然地，数也是数学的本原，即数是数学的基础。由于当时的数仅限于正有理数的范围，所以实际上认为用正有理数可以表示一切量。但是，不可通约量的发现（实际是无理数进入数学）使该学说破产，这是数学历史上的第一次危机。16、17世纪的西方，由于数系的扩张，使负数和虚数相继进入数学。这虽然没有像无理数进入数学那样，使数学发生危机，但也不是一帆风顺，而引起相当多的数学家的怀疑与非议。

牛顿和莱布尼茨的微积分以实无穷小为基础而产生了严重的逻辑困难，因而产生了第二次数学危机。为了给微积分寻找一个可靠的基础，于18与19世纪之交，数学界开展了一场分析批判运动。这一运动沿两个方向发展：一个是开展数学逻辑的研究，并导致数理逻辑的兴起；另一个是产生微积分的算术化方向。所谓微积分的算术化，一般说来，就是把微积分理论建立在实数连续统的基础上。这一工作在历史上是分两个阶段完成的。第一阶段以柯西的工作为标志，把微积分建立在极限理论的基础上。但是，极限离不开实数，所以当狄德金等的实数连续统理论完成以后，以外尔斯特拉斯的工作为标志，又把极限理论建立在实数连续统的基础上。这是第二阶段。这一阶段，既是微积分的算术化完成的阶段，也是微积分基础的完成阶段。

2. 数学基础研究中三大学派的主要观点

继狄德金等的实数连续统理论完成以后，康托尔的集合论第一次建立起超穷数概念和确定的运算系统。虽然在其产生的初期，曾受到一些权威人物的批评，但终于得到大家的承认，并给

予极高的评价，如把它的产生看成是“数学思想最惊人的产物”（希尔伯特语）等。从19世纪末期开始，集合论的概念和方法不仅已经逐渐渗透到分析数学、代数学和拓扑等数学分支，而且也逐渐渗透到物理学和质点力学等一些自然科学领域，为数学和这些自然科学提供了基础，并改变了这些学科的面貌。以集合为基础是现代数学重要特征之一。

但是，在康托尔集合论取得大家承认后不久，数学家和逻辑学家相继发现许多悖论：布拉里-弗蒂悖论（1897年）、康托尔悖论（1899年）和罗素悖论（1902年）（这三个悖论参看4.5节）。前两个悖论涉及到集合论中比较专门的概念，所以康托尔认为，只要把集合中某些概念作适当的修改或限制，问题就不大了。但是罗素悖论则不然。这个悖论不仅触及集合论中最基本的概念如集合、类与分子的从属关系，而且还触及逻辑学和语义学问题。数学和逻辑学，历来是最受科学家信赖的两门学科。有人说：“逻辑是不可战胜的，因为要反对逻辑还得使用逻辑。”也有人说：“数学和逻辑学是精确学科的两只眼睛。”① 但是，现在数学和逻辑学竟然出现悖论，这是数学家和逻辑学家不得不正视的事实，也使他们震惊。狄德金和弗雷格等皆因罗素悖论动摇了他们的著作的基本思想而不得不推迟出版的时间，有的竟推迟了十多年。比如，弗雷格的著作将要付印的时候接到罗素的来信，罗素在信中把自己发现的悖论告诉了他。弗雷格后来说：“一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成的时候它的基础垮掉了。当这部著作只等付印的时候，罗素先生的一封信就使我处于这种境地。”② 西方数学界不得不宣布，数学

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第4册，上海科技出版社1981年版，第289页。

② 同上书，第301页。

出现第三次危机。为了摆脱危机，西方数学界和逻辑学界开展了长达数十年的热烈争论，至今余波未消。

争论分两方面进行。首先，这次危机的根源是康托尔朴素的集合论出了问题。因此，为了摆脱危机，必须使康托尔朴素的集合论更加完善。1908年，策梅罗给出第一个集合论的公理系统，这个系统经过弗兰克尔和斯科朗的改进，建立起今天所谓的ZF系统。在这个系统中，包括罗素悖论在内的已发现的悖论都得到消除。但是，这个系统的相容性并没有证明。所以，将来会不会再出现问题，人们仍心有余悸。比如，彭加勒耽心地说："为了防备狼，羊群已用篱笆围起来了，但却不知道在圈里有没有狼。"①

其次，为了避免数学以后再出现类似问题，当时的数学家开展了数学基础的研究，力图为整个数学奠定一个坚实的基础，于是围绕下列问题展开热烈的讨论。这些问题是：纯数学研究对象的客观性问题、数学的形式化问题、数学系统的一致性和命题的判定问题以及数学理论真理性的标准问题等。鉴于罗素悖论的产生以及数学史上由于对无穷的应用而给数学带来的混乱，所以无穷概念和方法的合理性问题也是争论的重要问题之一。恩格斯曾经指出："不管自然科学家采取什么样的态度，他们还得受哲学的支配。"②数学家也不例外。在对这些问题的研究中，不同的数学家接受了历史上不同的数学思想和哲学观点，产生了数学基础研究中的不同学派，这就是常说的逻辑主义、直觉主义和希尔伯特的形式主义。这些学派之间，互相争论，互相批判，把数学基础的研究推向高潮。在本世纪开始的三分之一世纪里，是数学基础研究的黄金时期。

---

① M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第294页。

② 恩格斯：《自然辩证法》，第187页。

（1）逻辑主义的基本观点。

逻辑主义的先驱是笛卡尔和莱布尼茨，奠基者是弗雷格，代表人物是罗素。逻辑主义者对已有的数学知识采取完全确认的立场，并认为数学的基础是逻辑。比如，罗素说，逻辑和数学"二者也确是一门科学。它们的不同就像儿童与成人不同：逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成年时代"①。可见，他们把数学归结为逻辑，并认为：数学中的概念可以从逻辑概念出发，经由明确的定义而给出；数学中的定理可以从逻辑命题出发，经由逻辑的演绎推理而得出。他们的数学研究规划包括这样两步：一是建立严格的逻辑理论和集合论；二是以此为基础推导出全部（至少是主要的）数学。逻辑主义者认为，一旦完成了这项工作，数学就被建立在一个可靠的基础上了，从而数学的可靠性问题也就彻底解决了。罗素和怀特海合写的三卷巨著《数学原理》是该学派研究规划的代表作。这一著作实际上是沿集合论系统展开的逻辑公理系统，试图以此推导出全部数学。

对于逻辑主义的观点，我国数学家徐利治曾经指出：逻辑主义的出发点是错误的。事实上，他们把数学当成逻辑，正如19世纪的马赫和柯亨把理论物理学当成数学一样，前者是对数学的曲解，后者是对物质的遗忘；前者的心目中只有形式逻辑的框架，后者的心目中只剩下了微分方程。现代数学已经表明，逻辑主义试图改造数学的计划并没有完成，也不可能完成。

（2）直觉主义的基本观点。

直觉主义的先驱是克隆尼克，代表人物是布劳维尔。和逻辑主义对待已有数学知识的态度相反，这个学派对已有的数学知识采取严格批判的立场。因为在他们看来，悖论在集合论中出现并非偶然，而是整个数学"不可靠性"的一次大暴露。因此，在他

---

① 罗素：《数理哲学导论》，商务印书馆1982年版，第182页。

们看来，必须对全部数学进行严格的审查和彻底的改造。那么，究竟什么样的概念和方法才是可靠的呢？就数学基础而言，什么是数学的可靠的基础呢？直觉主义认为，这种基础不应是逻辑，而是“直觉”，数学是数学家的“心智的创造”。需要说明的是，他们所谓的“直觉”并不是指主体对于客观事物和现象的一种直接把握和洞察能力，而是指思维的“本能”，这种本能与客观世界完全无关。该学派的代表之一海丁说：“数学思想的特性在于它并不传达关于外部世界的真理，而只涉及心智的构造。”① 他们认为，数学中的定理不过是这些构造的记录而已。他们反对在数学中普遍使用集合概念，反对实无穷，反对非构造性证明，也反对使用排中律和反证法。他们反对逻辑主义的观点，认为逻辑不能作为数学的前提，因为他们认为逻辑不是先于数学的构造，而是在数学的构造过程中产生的。所以，不管拿怎样的逻辑原则作为证明数学定理的手段，都会犯恶性循环的错误。

直觉主义要求数学的对象必须是可构造的，有其合理的一面，但是他们把数学完全局限在能构造的范围，否定了相当大一部分数学，特别是涉及无穷方面的数学，使数学的范围大大缩小，这不利于数学的发展。

（3）希尔伯特形式主义的基本观点

为了克服这场数学危机，希尔伯特曾提出了一个方案：首先，将非形式化数学改造成形式化的公理系统；然后，用有穷的方法证明形式系统的一致性。为此，他建立了元数学，发展了有穷主义证明论。这个学派曾于20年代末用有穷的方法证明了只含有加法算术的一致性。他们预言，整个算术一致性的证明为期不远了。但是，1931年，哥德尔发表了不完备性定理，该定理断

① 海丁：《直觉主义：一个介绍》，北荷兰出版社1956年版，第8页。

言：在包含算术系统在内的任意形式系统中，存在命题F及其否定命题 $\neg F$ 是不可证的（这里的F称为该系统内的不可判定句）。把这个定理说得更简明一些就是，在一个足够丰富的形式系统内，其无矛盾性（即一致性）和完备性是不可能兼得的：它或者是不完备的，或者是矛盾的。该定理的发表宣布了希尔伯特试图建立一个完备而又无矛盾的形式系统不可能实现，迫使希尔伯特方案的支持者不得不放弃有穷方法的限制。1936年，甘岑用超穷归纳法才证明了纯数论的一致性。

上述三大学派互相争论，没有、也不可能取得一致的意见，都没有实现自己为改造数学而设计的方案。从30年代末期开始，又出现了以贝尔纳斯和哥德尔为代表的**柏拉图主义**，60年代又产生了拉卡托斯的**拟经验主义**，此外还有**约定论**以及各种**形式主义**等。这些学派之间的分歧今天依然存在。

（4）三大学派数学观的比较。①

如上所述，本世纪初期，在数学基础的研究中形成的三大学派，他们的基本立场虽然不同，甚至互相对立，但是，在观念上三个学派也有相同或相似的地方。它们的共同点和不同点可以概述如下。

第一，他们的出发点都是对已有数学的怀疑和不满，但都不是对已有的数学采取绝对的怀疑主义立场，而是希望能把可靠性尽可能地扩张到当时已有的数学中去。他们的不同处在于，一般说来，逻辑主义者最为“保守”，他们对已有数学（包括无限概念和方法）采取全部肯定的立场；直觉主义者最“激进”，他们对已有的很大一部分数学，特别是对无限概念和方法采取否定的立场；希尔伯特则持折衷的立场：既坚持有限，又希望保留已有的概念和方法。

---

① 这段内容参考了夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第117—119页。

第二，三个学派从各自的立场出发提出了自己的数学基础观：逻辑主义认为数学的基础是逻辑；直觉主义认为数学的基础是人的“直觉”；希尔伯特则认为数学的基础是无矛盾的理性思维。三个学派的数学基础观虽然不同，但是他们都认为，数学的可靠性问题只能依靠理性思维，而不是依靠经验（实践）来解决。所以在认识论上，他们实际上都采取了先验主义的立场。

第三，在思想方法上，三个学派共同之处是片面夸大在数学认识活动中的某些侧面：逻辑主义夸大数学和逻辑的共同性，否认二者之间的差异；直觉主义夸大了数学构造性的可靠性，否认非构造数学的可靠性；希尔伯特则把对数学的研究夸大为纯形式的研究。

第四，三个学派所设计的改造数学的方案各不相同：逻辑主义力图从逻辑公理和逻辑概念出发建立全部数学；直觉主义力图以构造性为标准改造全部数学；希尔伯特则按形式主义的设想制定了“希尔伯特方案”。这些方案虽然不同，但都表现出一种化归主义：逻辑主义试图把数学化归为逻辑；直觉主义力图把非构造性数学化归为构造性数学；希尔伯特则试图把数学的研究化归为纯形式的研究。

第五，三个学派的工作实际上都包含两个不同的方面：具体数学的研究和哲学分析。各个学派的研究规划是他们的哲学思想的具体表现，而他们的哲学思想本质上都是唯心的、形而上学的。因此，从根本上来说，他们的研究规划的失败也是不可避免的。

我国数学家徐利治对上述三个学派有一段中肯的评论。他说：“这三大学派有个共同的弱点：他们全都忽视数学科学对象内容的客观实在性，不承认数学对象题材的真正源泉是物质世界。例如，他们把反映客观真理的数学曾分别强调为‘纯粹心智的构造’、‘纯理性思维的产物’、‘自由选定的符号语言’等

等。总之，在他们看来，数学仿佛是独立于客观物质世界的某个思维王国中的自由乐园。所以尽管他们之间的意见观点有很大的分歧，甚至互相抨击，但不过是对修建这块自由乐园各有不同的主张与行动规划而已。”①

3.数学基础研究高潮的终结

前面曾说过，1890～1940年的50年，是数学基础研究的黄金时代，也是数学哲学以数学基础的研究为中心的时代。作为这一时代的印记，凡是在这段时间内的数学哲学著作大都以“数学基础”或与其近似的名称命名；凡是稍后完成的类似著作，其中数学基础的讨论都占有突出的地位。虽然在这一时期的研究中取得了相当丰富的“副产品”，但就三大学派的初衷而言，都以失败而告终。从40年代开始，作为从总体上对这一时期工作的反思，出现了众多的类似卡尔马的《数学基础——今在何方？》和斯莱尼斯的《数学需要基础吗？》等大量著作。在这些著作中，大都对前一时期研究方向表示怀疑或否定。

首先，数学到底有没有所谓的“基础”以及什么是“基础”？对此，斯莱尼斯把数学“基础”区分为：“数学的认识论基础”和“数学的内在基础”两类。对前者，他明确地说：“数学不需要认识论基础。”②后者是指现代数学开始的地方，犹如一座大楼的根基。大家都认为，现代数学基于初等数学，而初等数学是可靠的。斯莱尼斯问道：“有什么断言，什么基础能比初等数学本身的断言更可靠呢？”③

其次，悖论的产生是当时数学家感到震惊的问题，至少是数

---

① 徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社1983年版，第175页。

② 斯莱尼斯：《数学需要基础吗？》，见《自然科学哲学问题从刊》1984年第1期，第16页。

③ 同上刊，第18页。

学基础研究所要解决的重要问题之一。但弗兰克尔和巴-希勒尔认为："数学活动的真正领域，无论是分析还是几何，都没有受到悖论的影响，它们只是出现于那些特别的领域，而且远远超出了实际使用这些科学的概念的领域。"① 实际认为，"数学危机"是言过其实，且早已过去。

再次，关于数学相容性证明的不可能性，是否意味着数学就永远存在于悖论的阴影之中呢？普特南认为，我们不必为此而感到不安，因为，即使存在这样的证明，这也不过是数学的一个发展，而不是数学的一个基础，而且在任何时候，科学所要求数学的都要比单纯的相容性的证明多得多。实际是说，过去数学基础的研究把相容性看得过重，是数学家钻了牛角尖。

总之，40年代以后的数学哲学家，对前一时期工作的批判都有合理成分，但也有一些苛求之处。在数学基础研究的黄金时代，人们的工作实际上包括数学性的研究和哲学性的分析两个密不可分的方面，只是在那时数学性的研究居于主导地位而已。由于这一努力的失败导致40年代以后的沉寂，从而使哲学性的分析逐渐上升，并有居于主导地位的趋势。历史的经验为产生符合数学发展的数学哲学提供了条件。比如，卡尔马提出的观点就值得重视。他问道："为什么我们不公开申明数学同其它科学相仿，归根结底建立于实践之上并且必须在实践中受检验呢？"②

还应当看到，只要数学在发展，数学哲学上的分歧必然存在，不过将来的分歧将是更高层次上的分歧。

---

① A.A.弗兰克尔、Y.巴-希勒尔：《集合论基础》，北荷兰出版社1958年版，第4页。

② 卡尔马：《数学基础——今在何方？》，载《数理哲学译文集》，第33页。

4.3 数学的本体论问题①

本体论一般指存在及其本质和规律的学说。数学的本体论问题主要讨论数学到底是主观的还是客观的，是经验的还是先验的，以及数学的研究对象是独立的实体还是抽象的形式等方面的问题。

数学概念能否反映客观的真实存在？这一关于数学研究对象的本体论问题早在古希腊时代已被哲学家们所重视。毕达哥拉斯学派和柏拉图认为，数学对象是真实地、独立地存在的。亚里士多德则反对这一观点，并在《形而上学》一书中用了很大的篇幅批驳了他们关于数学对象存在方式的观点，阐明了数学对象不是独立存在，而是以一种抽象的方式存在于可感事物之中。分歧集中表现在柏拉图与亚里士多德关于理念的学说中，虽然二人都承认“理念”，但柏拉图认为“理念”存在于客观事物之外，它同客观事物是分离的；而亚里士多德则认为“理念”存在于客观事物之中，二者并不分离。

柏拉图同亚里士多德之间虽有深刻的分歧，且从那时起围绕这一问题的争论在哲学史上一直存在，但是在数学能反映客观实际这一点上他们的认识却是相同的。由于16世纪以前的数学，不管是数学概念还是数学命题，不管是几何学还是算术、代数，它们均可应用于实际。所以，在16世纪以前，一般地说，人们对柏拉图同亚里士多德之间的分歧并不十分重视。人们普遍认为数学内容的客观性和真理性是无可怀疑的。在数学家看来，哲学家关于数学对象本体论的争论是杞人忧天，因而一般不予理会。

但是从17世纪起，数学开始发生变化，特别是19世纪以来，

---

① 本节参考了夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》第四章。

越来越多远离自然的、从人们头脑中源源不断地涌现出来的概念和命题进入了数学。首先，由于数系的不断扩大而产生的负数和无理数，特别是虚数，不像正有理数那样产生于客观实际，人为的痕迹很明显。其次，以罗巴切夫斯基的工作为标志，非欧几何的产生和发展，打破了把欧几里得几何作为几何真理唯一标准的局面；三角形的内角和既可等于180°，又可小于180°，还可大于180°，简直不可思议。再次，几何学中n（n＞3）维几何甚至无穷维几何的产生，分析学中奇奇怪怪函数（如处处连续但又处处不可微的函数等）的引入，以及康托尔集合论中超穷数的引入等等。这些数学概念、命题和理论并不是从现实世界中直接抽象出来的，它们并不具有明显的直观背景，但数学家又不能否认它们，而是作为数学对象加以研究，所以只能承认它们是虚构的、想象的、人为的。这样，柏拉图同亚里士多德之间的分歧再次提了出来。争论的焦点仍然集中在数学到底是经验的还是先验的这一哲学基本问题上。不过在现代，具体的问题已经不再是虚数、非欧几何的客观性问题，主要是无穷和超穷能否作为数学概念的问题。

下面，简要评述西方数学本体论问题上的几个重要观点。

1.数学中的实在论

实在论在不同的数学家那里不尽相同。一般来说，这种观点认为，数学本身（包括实无限在内）是一种独立于人的认识之外的、不依赖于人类思维的独立存在。比较极端的实在论者认为，数学只存在于上帝的智慧之中；比较温和的实在论者则认为，数学本身是与物理世界无关的独立存在。

实在论根源于柏拉图，19世纪以前它在数学中影响并不大，占主流的是亚里士多德的观点。但是，从19世纪开始，数学人为的痕迹越来越明显，似乎数学是数学家的任意创造。实在论就是为了反对数学任意化倾向而兴起的一种思想。美国数学史家M·

克莱因在谈到实在论产生的历史原因时说："到19世纪末，盛行的看法是：所有数学公理都是任意的。公理只不过是导出结论的推理的基础。既然公理不再是关于包含在它里面的概念的真理，于是也就不用去管这些概念的物理意义了。……到1900年，数学已经从实在性中分裂出来了；它已经明显地而且无可挽回地失去了对自然界真理的所有权，因而变成了一些没有意义的东西的任意公理的必然推论的随从了。"① 他接着说："于是有些人采取一种神秘的观点，企图寻求对数学实在性和客观性的承诺。这些数学家……认为数学本身就是一种实在，是真理的一部分，数学对象所给予我们的就和真实世界的对象所给予我们的一样。数学家只不过是发现这些概念和它们的性质罢了。"②

例如：19世纪英国数理逻辑学家弗雷格说："如果我们相信数学的客观性，那就没有任何理由反对关于数学对象的这样一幅图景，即它们早已存在着、并等待着人们去发现。"③ 19世纪法国数学家埃尔米特在给荷兰数学家斯蒂杰斯的一封信中说："我相信，数学分析中的函数不是我们精神的任意产物；它们在我们之外存在着，并且和客观实在的对象一样，具有某种必然的特征；我们找到或发现它们、研究它们，就和物理学家、化学家及动物学家所做的事情一样。"④ 本世纪英国杰出的数学家哈代也说："数学定理的真伪，它们的真实性和谬误性是独立于我们对它们的了解的。在某种意义上，数学的真理是客观实在的一部分。"他还说："我相信数学的实在性是在我们之外，我们的作用只是发现它们或观察它们，而那些被夸张地描绘成为我们的'创造物'

① M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第110—111页。

② 同上书，第111页。

③ 转引自P.贝纳塞拉夫、H.普特南：《数学哲学论文集》，普兰提斯—霍尔出版社1964年版，第492页。

④ 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第111页。

的定理，其实只是我们观察的记录。”① 弗雷格、埃尔米特和哈代的观点都是数学实在论的观点。

现代西方的数学柏拉图主义，在数学本体论问题上持实在论观点。一般认为，集合论的创始人康托尔是柏拉图主义的代表之一。康托尔在论证他的超穷数理论的合理性时认为，数学本质不在于它同经验世界之间的联系，而在于数学思维即数学创造的“自由性”。他特别喜欢“自由数学”这个名称，他说：“如果让我选择的话，我情愿采用这一名称来代替流行的‘纯粹数学’的名称”；“数学在它自身的发展中完全是自由的，对于它的概念的限制只在于：必须是无矛盾的并且和先前由确切定义引进的概念相协调。……数学的本质在于它的自由。”② 这样，康托尔就为数学家自由创造数学提供了一条哲学“根据”。但是，在应用这一哲学原则解释他的超穷数理论时却遇到了困难。比如，超穷理论的真实性如何，超穷数的现实原型到底是什么等。这时他不得已倒向神学。他于1895年在给C.埃尔米特的一封信中明确地提出：数学对象的实在性并不在于真实世界，而是存在于上帝的无穷的智慧之中；数学对象的内在真实性、即逻辑上的相容性保证了这种对象的“可能性”，而上帝的绝对无限的本性则保证了这种“可能的对象”在上帝思维中的永恒存在；他还谈到，他的集合论直接渊源于神的启示③。

康托尔这种哲学的荒谬性是显然的。用列宁的话说，这是一种“怪诞的、惊人（确切些说：幼稚）荒谬的”④ 哲学，因而人们称其为极端的实在论者，这种观点在西方数学界中同意者并不

---

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第111—112页。

② M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第105页。

③ 转引自夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第221—222页。

④ 《列宁全集》中文第2版第55卷，第317页。

多。鉴于极端的实在论在数学本体论问题上暴露出赤裸裸的荒谬性，因此许多人采取了一种比较"温和"的形式——客观主义的立场，哥德尔就是其中的一位。

哥德尔是本世纪著名的数理逻辑学家，以他的名字命名的定理举世瞩目。因此，他的观点有一定的影响。在数学本体论问题上，哥德尔自称是"客观主义"立场。将数学同物理学加以比较是哥德尔常用的论证方法。实际上他是从数学真理客观性的信念出发来建立他的实在论观点的。他说："假定这样的对象（指集合——引者注）就如假定物理的对象一样是完全正当的，有同样足够的理由相信它们是存在的。如同物理的对象对于得出一个令人满意的、符合直觉的理论是必要的一样，它们在同样的意义下对于获得令人满意的数学系统是必要的。"①尽管他说："超穷集合论的对象显然不属于物理世界，甚至它们同物理经验的间接联系也是很不密切的。"②但是他仍认为，这并不能证明数学的非实在性。一般认为，哥德尔是把数学看成是一种描述事物的客观状况的学科。

上述哥德尔思想是有合理成分的。但是他的数学哲学思想也有明显的唯心主义倾向，他对"数学直觉"的分析就是这一倾向的表现。"直觉"（intuition）的原意是：在以往经验知识的基础上突发性地产生把握事物本质的能力。马克思主义哲学充分肯定直觉在认识过程中的作用，但它不是"天赋观念"，也不是"神的启示"，而是以实践为基础所产生的思维的能动性和创造性。哥德尔的基本思想是数学知识建立在"数学直觉"之上，但

---

① K.哥德尔：《罗素的数理逻辑》，载《数学哲学论文集》，普兰提斯一霍尔出版社1964年版，第220页。

② K.哥德尔：《什么是康托尔的连续统问题？》，载《数学哲学论文集》，第271页。

他对“数学直觉”的解释则是唯心主义的。他说：“尽管它们同感觉经验距离遥远，我们也具有对于集合论对象的某种像知觉一样的东西。……我认为，没有理由不赋予这种感性知觉、即数学直觉与导致建立理论物理的感性知觉以同样的信任。”①又说：“我们不能因为它们不能与基于我们感觉器官的某些东西相联系，就把这第二类的东西看成是康德所断言的那种纯主观的东西；毋宁说，它们也表示客观实在的一个方面，但是，与感觉不同，它们在我们中的出现可能是由于我们自身与实在之间的另一种关系。”②这两段话中所说的“它们”与“第二类东西”均指数学中同感觉距离遥远的那部分内容，比如康托尔的超穷数理论等。很明显，如果认为数学知识就建立在他所说的“数学直觉”之上，那就回到柏拉图的认识论立场上去了。正因为如此，西方一些数学哲学家把哥德尔称作“柏拉图主义者”，甚至把哥德尔看成是柏拉图主义的代表之一。我国有的数学哲学家认为，就本体论而言，哥德尔并不具有明显的柏拉图哲学色彩，只是由于没有坚定的哲学思想，所以在解释某些问题时受到了唯心主义的影响。

西方近几年来在数学哲学的研究中还出现了一种新的倾向，这就是：一部分持实在论的数学哲学家对传统的柏拉图主义的数学哲学观进行了尖锐的批评，普特南就是这方面的代表。

普特南是现代美国著名的哲学家和逻辑学家，是科学实在论者。他认为，科学理论是描述客观世界的，并且不断进步，日益逼近客观世界。他曾断言：唯物主义是一种“先验的哲学”，因为它先验地假定物质世界的存在，而他的实在论则是经验主义的

---

① K.哥德尔：《什么是康托尔的连续统问题？》，载《数学哲学论文集》，第271—272页。

② 同上书 第272页。

理论，是“后验的”。可见，他虽持唯物主义立场，但是并不彻底，没有摆脱经验主义的影响。普特南也把他的实在论观点应用于数学。他说：“一种彻底的实在论，不仅应对通常意义下的物质对象的存在性采取实在论立场，而且也应对于数学必然性和可能性的客观性（或者等价地说，对于数学对象的存在性）采取实在论立场。”①

普特南之所以在数学本体论问题上采取实在论立场，同哥德尔一样，主要由于他对数学客观真理性的确信以及数学和物理学的同一性问题的考虑。比如他说：“在我看来，数学哲学中的实在论有两个证据：数学的经验和物理的经验。”②这里所谓的“数学的经验”主要指数学本身的无矛盾性和现代高度发展的数学在解决科学问题方面所取得的成功。普特南认为，这种数学的经验证明了数学的真理性。他问道：“如果不存在这样一种关于大部分数学都是真理的解释，如果我们所做的仅仅是随意地去写出一些无意义的符号，其中甚至包含了尝试和错误，我们的理论怎么可能是相容的呢？它又怎么可能是这样的富于成果的呢？”③普特南所谓的“物理的经验”主要指数学在物理学中的成功应用。他说：“由于物理和数学是如此紧密地联系在一起的——离开了数学，甚至任何物理定律的表述都是不可能的——因此，对物理的客观真理性的肯定也就包含了对于数学真理客观性的肯定。”④因此，普特南说：“数学的经验表明在某种解释下数学是真理；物理的经验则表明这种解释是实在的。”⑤

普特南在表明自己实在论观点的同时，又特别强调了自己的实在论同传统的柏拉图主义的区别。他说，“传统的实在论往往

① 转引自夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第225页。

②③④ 同上。

⑤ 同上书，第225—226页。

是与柏拉图主义联系在一起的，而按照柏拉图主义的观点，数学对象就被看成是一种绝对的、无条件的、非经验的存在；而且，数学真理则被认为是先验的真理。”① 普特南既不同意柏拉图主义的认识论（因为他反对存在有绝对的先验真理，并认为数学不是先验的科学），又不同意柏拉图主义的本体论（因按照他的观点，数学只是借助于特殊的概念对普通事物进行研究）。

此外，普特南还认为，对于数学对象的实在性的承认应有所限制，而限制的标准就是看数学理论对包括物理学在内的其它科学有无必要。也就是说，如果某种数学理论对其它某门科学不可缺少时就是实在的。普特南经过研究得出的结论是：目前只要承认集合的实在性就够了；以后随着科学的发展需要更多的数学时，再承认这些数学的实在性。

由于普特南的数学实在论只是停留在数学与物理学的类比，即两种科学互相翻译可能性，而不是对数学本体论本身作出的分析，所以他的实在论不能同唯物主义划等号。

实在论的产生，在一定程度上是反对本世纪以来数学中“任意化”倾向的，也是关于数学客观真理性的朴素信念在哲学上的反映。这一思想的本身鼓励人们积极地进行思辨式研究。它的提出，在一定意义上促使数学家们在自己的研究中采取较为客观的、科学的立场。当某些高度抽象的数学理论因找不到现实原型而受到怀疑和反对时，它还可以给数学家以一定的信念。比如，康托尔的一生比较坎坷，在他的超穷数理论受到强大的阻力的年代，这一哲学思想成了他坚持研究的精神支柱。

然而，实在论毕竟是一种错误的理论，是对数学研究对象的曲解。首先，在马克思主义看来，在客观世界中质与量是辩证的

---

① 转引自夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第226页。

统一，从而作为研究量的数学就不可能是一种独立的客观存在，所以，实在论的基本立场即把数学看成是独立于人的认识之外的存在的立场是错误的，事实上，这种理论始终无法、也不可能清楚地回答数学对象到底是一种什么样的客观存在以及在哪儿存在，他们只能说教式地谈数学具有脱离客观物质世界的独立性。其次，实在论者都自觉或不自觉地混淆了两种不同的客观性：数学概念在内容上的客观性和数学概念本身的客观性。数学概念在内容上的客观性是应当肯定的，但如果因此而认为数学的对象本身也是一种脱离物质世界的客观存在就不可思议了。最后，实在论者认为，一切可能的数学概念均具有客观实在性，所以数学家的工作是单纯地发现而不是创造。这不仅完全抹煞了自古以来众多杰出的数学家的作用，而且也不符合数学发展的真实历史。数学史表明，正是通过众多数学家的创造性工作，数学概念才得以不断的丰富和发展。数学发展的历史不仅是一种观察和发现的历史，而且也是一种抽象概念不断形成和发展的历史。因此，数学家的活动不单纯是消极的观察和发现的活动，而主要是积极的、创造性的思维活动。

2.数学中的概念论

概念论是本世纪以来西方在数学本体论问题上的重要观点之一。同实在论相反，这种观点强调数学对象对于人类思维的依赖性，认为数学的对象并不是一种真实的存在，而只是一种概念；这种概念由于代表了一种“思维的构造”，所以不是没有意义的。在概念论者看来，数学命题虽然是有意义的，但我们不能把数学的研究对象看成是真实的事物，而只能看成概念，即“合理”的思维活动的产物。罗素的观点是西方数学哲学中概念论的重要表现之一。

罗素认为：数学概念代表了一种逻辑构造，即建立在“原始材料”基础之上的思维构造；对罗素来说，重要的是给出一种

“翻译”规则，借助这种规则，原来包含数学概念的命题可以转化成只包含逻辑项的命题。

其实，罗素早年曾经是一个典型的数学柏拉图主义者。他曾经认为宇宙间有两个实在的世界：一个是处于时空之中的“经验世界”，这个世界是具体的、变动的、暂时的、偶然的；另一个则是处在时空之外的“共相世界”，这个世界是抽象的、不变的、永恒的、必然的。罗素在早期认为，数学对象就是“共相世界”中的真实存在。例如，罗素曾说：“在我的想象中，所有的数目都排成一行，坐在柏拉图的天上。”① 他还说：“数学基本上不是一个了解和操纵感觉世界的工具，而是一个抽象的体系，这个体系是存在于柏拉图哲学意义的天上。”②

但是，20世纪开始不久，他动摇了。因为他觉得柏拉图所提供的这幅世界图景实在是太拥挤了，令人无法容忍。这清楚地表明了罗素对实在论的怀疑。为了解决这一问题，他致力于消除不必要的关于数学对象存在性的假设。他说：“奥卡姆的剃刀给了我一个剃得更干净的真实的图画。”③ 罗素的具体作法是把数学对象看成是“逻辑构造”，即认为数学对象事实上只是一种建立在逻辑项上的思维构造。因此，尽管数学命题是有意义的，但是我们不能认为数学概念代表了一种真实的存在。这表明罗素在数学本体论问题上立场的转变。针对当时流行的康托尔关于集合基数的定义（按照这一定义，集合的基数是两次抽象的结果：一次是抽去集合中元素所包含的质的内容；另一次是抽去元素之间的次序关系），罗素指出：“由于基数是从集合中推论出来的，而不是由集合构造出来的，所以必须对它的存在保持怀疑，除非从一个特定的形而上学的假定出发。”但是罗素接着明确地说：

---

① 转引自夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第234页。

②③ 同上。

"我们不需要这个形而上学的假定。"① 他指出，我们可以把 2 定义为"一切双的类"，把 3 定义为"一切三个一组的类"，等等。因此，在罗素看来，数就不是什么真实的存在，而只是一种为了说话方便而引进的概念。罗素说，引进上述定义，"我们就不把数当形而上学的实体了。事实上，数就只成了语言上的便利，……数学家的根本器具就化为或、不、一切、一些等这样一些纯粹是逻辑上的名辞了。"他还说，"在知识的一个部门里所需要的那些不明确的术语和未经证明的命题，我就把它们的数目削减了，这是我第一次感到奥卡姆剃刀的用处。"② 显然，上述变化过程是把数学化归为逻辑的过程。罗素认为，这种化归不仅为数学提供了可靠的"基础"，而且还消除了不必要的关于数学对象存在的假设。可见，逻辑主义的观点同他在数学本体论问题上从柏拉图主义向概念论立场的转变是紧密相联的。

本章第二节曾经指出，逻辑主义把数学化归为逻辑的努力并没有取得预想的成功，从而罗素在本体论问题上的观点即把数学的对象看成是一种纯粹的"逻辑构造"的观点也就站不住脚了。

在数学本体论问题上，直觉主义的概念论更为典型。罗素和直觉主义都认为，虽然数学命题是有意义的，但我们不能把数学的研究对象看成是真实的事物，而只能看成是"合理"的思维活动的产物即概念。但是，在概念如何产生这一点上，二者是有区别的：罗素认为数学概念是一种纯粹的"逻辑构造"；直觉主义者则认为数学概念是一种纯粹的"心智构造"：存在＝被构造。例如，直觉主义的代表之一海丁就明确地说："在心智的数学构造的研究中，'存在'必须是'被构造'的同义词。"③ 直觉主义者

---

① 转引自夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第235页。

② 同上书，第236页。

③ A.海丁：《直觉主义：一个介绍》，第2页。

力图从这一立场出发建立起直觉主义的数学体系。

由于直觉主义者以自然数为出发点，然后通过“构造”发展数学，因此对他们来说，数学本体论问题就可归结为关于自然数的实在性问题以及关于构造性方法性质的分析。通过对这两个问题的分析，建立他们“纯粹的心智构造”的数学理论。直觉主义认为自然数以至整个数学都是建立“原始数学直觉”之上的：自然数是原始数学直觉的直接产物；从自然数出发去发展数学理论是原始数学直觉的反复应用。这种“原始数学直觉”又是如何来的呢？他们认为这是人类思维的本能，与客观世界没有任何联系。因此，在他们看来，数学概念只是一种纯粹的心智构造。例如，海丁就说：“我的数学思想属于我个人的智力生活，并限于我个人的思想，……数学思想的特性在于它并不传达关于外部世界的真理，而只涉及心智的构造。”① 从这一立场出发，他们自然地就要排除实无限，只承认潜无限；自然地要把非构造性数学化归为构造性数学。

今天看来，直觉主义的概念论立场也包含严重的困难。首先，由于直觉主义完全否认数学理论的客观性，所以他们就无法解释数学理论在客观世界的可用性。人们问道：由主观心智构造的数学为什么能完全用于客观的物质世界呢？对此，直觉主义无法回答。其次，夸大数学构造的主观性，其逻辑结果必然导致数学理论的任意性，但这同直觉主义强调的数学理论的必然性是不可调和的矛盾，并受到形式主义者克里等人的批判。最后，由于直觉主义排斥实无限，企图把非构造性数学化归为构造性数学的工作并没有成功（比如，他们无法构造实无限），因此，不能认为他们把数学看成是纯粹心智构造的观点是正确的。

3.数学中的形式主义

---

① A.海丁：《直觉主义：一个介绍》，第8页。

现代形式主义是希尔伯特的数学观的继承和发展。希尔伯特对实无限的实在性持否定立场，他说："无论何处，（实）无限是不会实现的。它既不存在于自然界中，也不能作为我们合理思维的基础。"①但是希尔伯特认为实无限可以作为"理想元素"（近似于莱布尼茨把无限小和无限大看成是一种"有用的虚构"）引入数学，条件是不因它的引入而导致矛盾和错误。一般认为，希尔伯特所采取的是一种"方法论的实无限论"的立场，作为这一立场的直接表现，则是把包含实无限在内的数学看成是"形式理论"，在这一理论中所涉及的只是无意义的符号的组合。现代形式主义者实际上是把希尔伯特对无限的数学所采取的形式的观点推广到了整个数学。

一般来说，现代形式主义者认为，形式系统的本身就是数学的研究对象，也就是说，一切数学对象都是没有实际意义的符号的"自由组合"，数学命题是按照一定法则组成的符号系列，对此，没有、也不必要给出解释，因而数学家所从事的工作就是无意义的符号系列的纯形式的变换。可见，形式主义同实在论的观点是完全对立的，由于概念论的失败使它的信奉者增多，且同实在论的对立显得更加尖锐。实在论和形式主义是现代西方在数学本体论问题上的两种对立的理论。

对于形式主义来说，根本性的问题是：人们能否任意地去建立各种形式的系统？数学的历史表明，数学理论的建立具有一定的选择性。那么，应当怎样"解释"这种选择性呢？为了回答这个问题，形式主义者提出了理论的"可接受性"问题。由于可接受性的标准不同，所以形式主义又有不同的派别。

纯粹的形式主义　这一派认为，只要一个数学理论在逻辑上是无矛盾的，这个理论就是可接受的。例如，P.J.科恩就持

---

① D.希尔伯特：《论无限》，载《数学哲学论文集》，第151页。

这样的观点。他认为，数学只是一种纯粹的符号游戏，这种游戏的唯一要求就是它不会导致矛盾。

美学的形式主义 持这一观点的人认为，一个数学理论的可接受性取决于它的精致性及其内部的相关性等一些美学的考虑。例如，非标准分析的创立者鲁滨逊就持这种观点。

实用的形式主义 这是克里的观点，他自称是“经验的形式主义者”。他认为一个数学理论的可接受性取决于它的可应用性，也就是用“实用”（包括在经验科学中的应用）作为“可接受性”的标准。

形式化对现代高度发展的数学的确非常重要。数学形式化后，既可以研究那些直接或间接从研究物质世界中获得的数学理论，也可以研究那些作为人的思维创造出来的形式理论，并在可接受性的限制下把数学研究从“实在”的束缚下解放出来。因此，尽管有不少著名数学家对它们主张的“自由组合”提出了批评，但是形式主义在西方仍然具有一定的影响。

但是，这种形式主义的理论仍有很大的局限性。第一，形式主义是对数学对象抽象性的片面夸大（实在论是对数学对象客观性的片面夸大）。由于这种观点绝对地否定数学的客观性，因此，它们同概念论者一样无法解释数学的可应用性。尽管这一困难他们注意到了，而且也明确地承认，但无力作出解释。第二，形式主义者的可接受性的标准，不仅不相同，而且都比较模糊。例如，“美学”标准就有一定的主观色彩；“实用”标准也只有相对的意义；至于“无矛盾”标准，人们会问，为什么人们不去建立一个既没有矛盾而又是毫无实际意义的其它形式体系呢？对此，“无矛盾”标准论者也无法回答。第三，如前所述，否定无穷的客观性是形式主义的基本出发点，但这一点，辩证唯物主义的数学哲学家是不能接受的。第四，应当承认，数学发展有一定的内在逻辑，有相对的独立性。但是形式主义者把这一点夸大成

是人的思维纯粹的自由创造。这一点不仅马克思主义者反对，而且也受到西方一些著名的数学家的反对。例如：F.克莱因就明确指出，任意结构就是“一切科学的死亡”①。当代法国著名数学家、布尔巴基学派的代表之一丢东涅指出：“数学发展的危险在于有人宁可一心一意妄图超越前人去搞一些毫无根据的抽象，而不是去认真解决尚未解决的问题。从19世纪以来，就存在着这种没有根据的公理化的趋势，而且后来一直不断地增长，……只是为了任意地推广已知的现象而人为地引进的公理系统很少取得显著的成功。”②

4.4 数学理论的真理性问题

真理是认识主体对客体即客观事物及其发展规律的正确反映。数学理论的真理性问题是数学哲学中认识论的主要问题，在数学发展的历史上始终存在着不同的观点。首先，数学理论有没有真理性呢？对这一问题有两种截然不同的回答：有的数学哲学家(如现代形式主义者)认为没有；更多的数学哲学家则承认有。其次，承认数学理论有真理性，必然涉及检验它的标准，检验的标准不同，结论也就不同。比如，数学理论的真理性是主观的还是客观的呢？也就是数学作为一种理性认识，要不要回到实践中去检验呢？唯理主义者因把数学真理看成是主观的，所以认为不必要回到实践中去检验；但是经验主义者持相反的观点。

1. 18世纪以前朴素经验论的真理观

自欧几里得把亚里士多德的逻辑学应用于数学，写出他的名

① 转引自M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第114页。

② 丢东涅：《数学家与数学发展》，载《科学与哲学》，1979年第5期。

著《几何原本》以来，数学演绎体系，从而它的逻辑的严格性已逐渐被数学家所承认。最早的逻辑严格性的典型实例是由欧多克斯提出并由阿基米德完善了的“穷竭法”。这个方法在逻辑的严格性上是无懈可击的；它也有几何的直观性，数学家们用它解决了不少涉及无穷的数学和自然科学问题。从古希腊时代起，数学体系的逻辑严格性已成数学家普遍遵守的传统。

17世纪初期以前的数学主要是包括算术、几何和代数的初等数学。几何学是关于现实世界空间关系的学问；算术和代数是现实世界数量关系的学问。这时期逻辑的严格性同它们内容的客观性是统一的。一般认为，它们既来源于客观世界，又能应用于客观世界，且经受了长期的实践的检验。所以，人们对它们的客观真理性相信无疑。

16世纪，在数学和自然科学蓬勃发展的情况下，穷竭法的几何框架及其繁琐的逻辑论证反而影响了这一方法的广泛运用，因而使传统的逻辑严格性的观念受到一次冲击。微积分的先驱者如斯杰文、开普勒、卡瓦列利、费尔马以及帕斯卡等，为了解决数学和自然科学中提出的新问题，提出了种种“求积法”及“切线法”。在逻辑严格性和实用性不可兼顾的情况下，都宁愿放弃逻辑严格性，采取比较简明、实用的方法，只要用这种方法得出的结果能经得起实践的检验就行了。这是朴素的经验论的真理观。

但是，这种朴素的经验论的真理观，由于唯理论的产生而受到挑战。唯理论者笛卡尔认为，用演绎法不仅能建立整个数学，而且还要推导出所有自然科学。在笛卡尔那里，数学命题的不矛盾性已有端倪。逻辑主义的先驱、唯理论的代表莱布尼茨继承并发展了古希腊数学的演绎传统，明确提出了“不矛盾原则”。他说：“数学的伟大基础是（不）矛盾原则或同一原则，这就是说，一个陈述不能同时是真的而又是假的，因此A是A而不能是非A。只要这一原则，就足够证明全部算术和全部几何学，即全

部数学原理了。”①这一思想逐渐被一些数学家接受。18世纪在科学界围绕着牛顿和莱布尼茨的微积分的那场大论战，就是检验数学真理性的两种标准——社会实践和逻辑无矛盾的大论战。一派认为，虽然当时的微积分不符合逻辑严格性的要求，但因用它能得出符合实际的结果，所以承认它是真理；另一派虽然也承认它的结论符合实际，但因不符合逻辑严格性而不承认它是真理。当时的多数科学家认为，能否符合社会实践是主要问题，而能否符合逻辑规律则是一个技术问题。所以朴素的经验论仍居于主要地位。

18世纪初期，法国科学院曾发生一场关于地球形状的大辩论。一派接受牛顿的万有引力学说，认为地球应当是两极往里缩、而赤道凸出的扁椭球；另一派接受笛卡尔的涡流学说，认为地球应当是赤道往里缩、而两极凸出的长椭球。两派都拥有一批权威的学者，争论长达数十年、延续几代人。最后双方接受实践的裁决——派出科学测量队对地球子午线进行实际测量。这虽然不是检验数学理论真理性标准的争论，但却从一个侧面说明，18世纪，经验论的观点仍是科学界主流。

2. 19世纪以来各种唯理论的真理观②

在19世纪以前，尽管不同的哲学家对数学真理作了不同的解释，但是在承认数学具有真理性这一点上却是共同的。从19世纪开始，随着数学三个基本部门取得突破性成就，在数学是否具有真理性这一问题上，西方数学界出现一些悲观论点。以罗巴切夫斯基工作为标志，产生并发展了众多的几何学。这样多的几何学都可用于描述物理空间，但是它们之间却有相当大的一部分内容是互相矛盾的，这使数学家对数学的真理性感到困惑，于是有人

① 《莱布尼茨与克拉克论战书信集》，武汉大学出版社1983年版，第17页。

② 以下内容参考了夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》第五章。

认为，几何学不能给出真理。伽罗瓦的群论产生以来，代数学又产生了众多的分支，而它们的创立者，根本不保证它们的规则能否适用物理世界，这又加深了人们对数学真理性的困惑，许多人认为代数学也不能给出真理。在实数理论基础上产生并发展的超穷数理论——集合论，从一开始就是数学家争论的热点，特别是其中悖论的产生而造成的严峻形势把数学家置于尴尬的境地。数学基础研究中的三大学派本来都试图从自己设计的方案出发，为数学奠定一个牢固的基础，但是后来终于不得不痛苦地认识到这是不可能的。于是又有人认为，虽然数学真理是存在的，但它是不能达到的，就是达到了真理，也无法证实。哥德尔不完备性定理表明，数学的完备性与不矛盾性不可能兼得，所以又有人认为，人类企图认识真理是不可能的，人的认识有一个不可逾越的界限。可见，他们又回到康德的思想："自在之物"是存在的，但是它是"不可能认识"的。

如上所述，19世纪以前，经验论的观点在数学中居于主导地位。但是19世纪以来，伴随数学的巨大发展，唯理论却成为主流。这时的数学家们，从不同的哲学立场出发提出种种不同的数学真理观。

以罗素为代表的逻辑主义者，认为所有数学均可逻辑化。由于他把数学看作是"逻辑的构造"，因而逻辑真理就是数学真理。这种真理观在当时就受到以布劳维尔为代表的直觉主义的批判。但是，直觉主义的真理观也不是都同意的。直觉主义认为，数学是借助人的"数学直觉"构造出来的，因此数学的真理性只能由"心智"或"充分显然"来判定。其实，逻辑主义和直觉主义在方法论问题上都使用逻辑，都主张逻辑上无矛盾性；在认识论问题上，虽然一个说数学是"逻辑的构造"，一个说数学是"心智的构造"，说法不同，但是实际上都认为数学是主观的，其真理性不必通过实践去检验，而是通过逻辑即理性来检验。

现代形式主义在西方比较流行，按这种观点，数学是一种没有实际意义的符号系统，所以不存在所谓的真理性问题，而只须考虑其“可接受性”问题。首先，形式主义企图用所谓的“可接受性”问题取代数学真理性问题，那么什么是“可接受性”呢？按其代表人克里的解释：如果有甲乙两个形式系统，人们对甲系统比对乙系统更感兴趣，则甲系统的可接受性就比乙系统的可接受性大。可见，可接受性是感兴趣的同义语，实际是用感兴趣程度的大小去代替真理的多少，这是主观真理论的一种表现形式。其次，可接受性的本身也有一个标准问题。不同的形式主义者的标准是不同的。以P.J.科恩为代表的形式主义者，用数学理论有无矛盾作为判别真理性的标准。诚然无矛盾性是数学真理应当具备的条件，但不能看成是真理的充分条件。凡是无矛盾的符号系统都是真理也是难以被人接受的。以鲁滨逊为代表的美学形式主义者主张用“美”的标准（如形式的对称性、简明性和逻辑的和谐性等），但是“美”的本身毕竟带有认识主体的主观色彩，不管作如何的限制，终究不能摆脱主观真理论的巢臼。

同以克里为代表的形式主义的真理观相近似，西方还有一种实用主义的真理观。克里自称是“经验的形式主义”。他认为，理论的可接受性唯一地决定于它对相应的目的来说是否方便，富有成果。实用主义者则更强调实用性。实用主义认为任何数学理论的哲学性思考（如本体论问题和真理性问题等）都是毫无意义的，而应当代之实用性思考。他们的观点是：“有用就是真理”。实用主义者抹去数学理论的客观性，只谈它的实用性，并没有回答它为什么能够应用的问题。马克思主义哲学认为，一个理论之所以是有用的，只是由于它正确地反映了客观实在。数学理论也是如此。不是因为数学理论有用而才说它是真理，而是因为它是客观的，所以才能应用于客观实际。因此，实用主义者在真理性与实用性的关系问题上为我们提供的只是一种颠倒了的图像。显

然，和形式主义一样，实用主义的根本困难是由于它完全否定数学理论的客观性所造成的。

在数学理论的真理性问题上，康托尔、贝尔纳斯、哥德尔和普特南等人持实在论的真理观。他们虽然反对逻辑主义和形式主义的真理观，认为数学不是没有内容的纯形式系统，承认数学理论可应用于客观世界，也承认实践是检验数学理论的标准，但是，他们对数学理论的起源则作了先验论的解释，这不仅使数学成为无源之水，而且无法解释先验的理论为什么能应用于现实世界的问题。因此，实在论的真理观也不能认为是全面的。

在数学理论的真理性问题上，本世纪初期法国数学巨匠彭加勒的观点应当重视。自非欧几何得到承认以来，不少数学家迫于严酷的现实，在数学真理问题上采取"二元论"的立场：放弃几何的绝对真理性，坚持除几何之外的数学命题特别是算术命题的绝对真理性。比如，非欧几何学创始人之一的高斯就主张这一见解。他说："按照我的最深的信念，在我们先验的知识中间，空间理论与纯粹算术占有完全不同的位置。"① 他又说："我愈来愈深信我们不能证明我们的几何（欧几里得几何）具有（物理的）必然性，……我们决不能把几何与算术相提并论，因为算术是纯先验的"。② 彭加勒在高斯这一结论的基础上提出了自己的数学真理观：几何真理的约定性与算术真理的先天综合性。

在算术真理性方面，首先，彭加勒认为，算术最基本的对象是自然数，而在他看来自然数是完全超经验的理性分析的产物，是精神的产物。其次，彭加勒指出，算术中最基本的一些命题，如加法和乘法的结合律和交换律等，事实上都是建立在数学归纳法之上。对于数学归纳法，他说："我们只能用数学归纳法才能

① M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第107页。

② M.克莱因：《古今数学思想》第3册，第289页。

前进，只有它才能告诉我们新鲜的事物。如果没有……数学归纳法的协助，我们就无力创造科学。"① 他还说，数学归纳法"既非分析法所能证明，又非经验所能核验，它正是先验综合判断的实例"②。因此，在彭加勒看来，数学归纳法，进而算术命题的先天综合性就得到了证明；自然地，算术命题的真理性只能由理性本身得到解释。显然，彭加勒又回到康德关于数学命题是先天综合判断的立场上去了。

在几何真理性方面，由于非欧几何的建立，彭加勒认为，康德关于几何命题是先天综合判断的思想必须放弃。他认为几何学命题不是经验真理，而是一种"理想物"，之所以如此，因为"任何实验与欧氏公设永远不会有矛盾；而任何实验与罗氏公设也不会有矛盾"③。由于几何的真理性归根到底是公理的真理性，而对公理，彭加勒说："它们原来是一些公约"，或者说是"伪装之定义"。所谓伪装的定义，按彭加勒的解释，就是它们并不是对客观对象的真实描述，恰恰相反，是借助这些公理定义几何对象。因此，几何公理的选择有一定的自由性，是一种"约定"，但绝不是随心所欲，不是"任意"。他说："一切可能的公约，……是自由的，它为免去一切矛盾起见，才有所限制"；他又说，"这些法令（指公理）是否任意的？不！否则它们就不生效了"。尽管彭加勒一再谈到几何公理"自由性"不等于"任意性"，应当有所限制，但因自由性与任意性的界限难以划分，所以他关于几何真理性的约定论观点至少有浓厚的主观性。其次，彭加勒把算术真理与几何真理截然分开的思想，尽管在数学思想史上曾经出现过，但毕竟不占主流；主要的倒是算术与几何自古

① 彭加勒：《科学与假设》，商务印书馆1957年版，第17页。

② 同上书，第14页。

③ 同上书，第57页。

以来就互相渗透、促进、依赖，笛卡尔等关于解析几何的思想就是二者有机结合的实例。所以彭加勒把二者绝对地对立的观点也不能认为是全面的。

同彭加勒的几何真理的约定论观点比较相近的，在数学界还流行一种条件真理论。这种观点的产生，直接根源于非欧几何的产生与发展。因为人们看到非欧几何同欧几里得几何互不相容，二者也不能互相证伪，两种互相矛盾的数学理论都是数学真理。如何解释这种“奇怪”的现象呢？条件真理论的回答是：数学本身是一种“假设——演绎”系统，也就是说，前提（假设）如果是欧几里的平行公理，就得出欧几里得几何；前提如果是罗巴切夫斯基公理和黎曼公理，就分别得出罗巴切夫斯基几何和黎曼几何。至于前提（公理）是否正确，即是否是真理，数学家无需过问。这就是条件真理论的基本观点。这种观点其所以有一定的吸引力，主要是它为那些力图超脱哲学困扰的数学家提供了哲学“根据”。因为，按照这种观点，数学所研究的只是从怎样的前提出发演绎出怎样的结论，即任意地去建立各种“假设——演绎”系统，而根本无需考虑其前提的真理性问题。例如，B.波耶就说：“唯物主义和唯心主义的哲学家们都没有领会到如目前被接受的数学的本质。数学既不是对自然界的描述，也不是对自然界作用的解释，它和物理的运动或形而上学的量的生成无关。它仅仅是可能关系的符号逻辑，因而跟近似真理和绝对真理都无关，而只与前提的真理有关。也就是说，数学所判定的是从给定的前提可以逻辑地得出的结论。”① 条件真理论的局限性是明显的。他们把全部数学都归结为条件式命题，人们自然地会问：迄今为止的数学，为什么只从现在已知的公理出发，而不是从其它任意杜撰的公理出发去建立“假设——演绎”系统呢？例如，为

① B.波耶：《微积分概念史》，第325页。

什么不从 1 + 2 = 5 去建立算术系统，不从三角形的内角和等于150°去建立几何系统？对此，条件真理论者无法解释。他们认为前提（即公理）的真理性不必去考虑的观点实际上是回避了不应当回避的问题。

当上述众多的数学真理观均受到其反对派不同程度的批判后，本世纪60年代，拉卡托斯又提出了一种拟经验的真理观。按照这种观点，数学同自然科学一样也存在着证伪，而证伪有两种形式：潜在的证伪和启发式证伪。例如，集合论产生了悖论，说明它不符合不矛盾原则，因此不能认为它是真理，必须对它作出修正，使之符合逻辑，这叫潜在的证伪。启发式证伪是：如果一个形式系统中一个命题被非形式系统中相应的命题所否定，则前者就不是真理，也必须作出修正。也就是说，形式系统中的错误是由非形式系统的启发而得到修正的。实际上是说，形式理论系统的真理性要通过非形式理论系统来检验。可见，拉卡托斯笔下的拟经验实际就是非形式理论系统。所以拟经验就不是我们所说的经验或实践。因为非形式理论毕竟也是理论。用一种理论的真理性去检验另一种理论的真理性，并没有跳出理论思维的范围，不可能真正解决数学理论的真理性问题。因此，拉卡托斯拟经验的真理观并不彻底。

3.检验数学理论真理性的标准问题

如上所述，在数学理论的真理性问题上，各学派的立场并不完全一致。第一，在数学是否具有真理性这一问题上，有的基本上持否定的态度，例如，一般说来，形式主义者认为数学是符号的组合，不存在所谓的真理性问题；又如，实用主义者和条件真理论者认为，对数学真理性的思考没有意义。第二，在承认数学具有真理性问题上，多数学派持主观真理论的立场，认为数学真理是主观的，从而认为检验的标准是逻辑证明——用逻辑上无矛盾性代替实践检验。第三，有的学派（如实在论者）虽然承认

数学理论的真理性要通过实践检验，但是他们对数学理论的来源又作了先验主义的解释。

根据辩证唯物主义，首先，数学作为研究客观事物量的侧面的理论，不管现代数学多么抽象、艰深，归根到底来源于客观世界，而不是来自彼岸世界，也不是人的头脑先天所固有的。因此，在本体论问题上，数学是经验的，而不是先验的；是客观的，而不是主观的。其次，数学理论不仅具有真理性，而且检验真理性的标准是社会实践。

当然，数学又不同于以现实世界的某一运动形式为研究对象的自然科学；它的对象并不涉及物质世界的具体事物，因此，它的真理性不能用通常的科学实验来检验。高度抽象性与逻辑严格性是大家公认的数学的显著特点，所以数学离不开演绎法。因此，在方法论问题上它具有演绎的性质。既然用演绎法，就离不开逻辑，没有逻辑就没有数学。这一点也是数学界一致同意的。问题是逻辑上的无矛盾性能否作为检验数学理论真理性的标准？上述多数学派都认为可以，他们认为只要逻辑上无矛盾就是真理。诚然，数学作为一门科学，绝不能接受有矛盾的“理论”，但是逻辑上无矛盾只能说明它在逻辑上的严格和理论体系上的自洽，也就是说它能“自圆其说”。但是自圆其说就是真理的观点早就受到直觉主义的批判：谎话可以说得头头是道，自圆其说，但是谎话毕竟不是实话。实际上，逻辑前提与逻辑判断均以实践为依据。数学分析中收敛与发散概念的提出，就是为了避免对发散级数运算出现不合理的结果。今天一些数学家对公理集合论中选择公理的怀疑也是由于用它得出不合理的结果。可见，逻辑上无矛盾或自圆其说，只是数学真理性的必要条件，而不是充分条件。

今天高度发展的数学，其内容极为抽象，并不直接涉及具体的物质对象，所以一般说来不易直接得到社会实践的检验，但是

仍可以通过其它科学作间接的检验。当然，这种检验不是以逻辑证明为根据，归根到底是以某种物质的实践活动为根据。

应当说明，这里所说的实践是检验数学理论真理性的标准，不是说数学作为一种理论，它的发展总是亦步亦趋地跟在实践的后面，而是有其相对的独立性；作为一种理论，它应当而必须走在实践的前面，为实践开辟道路。在这种情况下，自然地会产生某些新数学理论，而这种理论虽然满足逻辑无矛盾的要求，但一时还很难找到它的应用。对这种数学理论不应采用短期行为，将其简单地否定或列入“另册”。因为一个正确的数学理论要得到实践的证实，往往要等几十年、几百年、甚至上千年。在数学发展史上众多的超前发现就是例子。数学的历史表明，它的发展，首先，是受社会实践的推动，在社会的需要的推动下发展已有的数学，有时也产生新的数学理论。其次，是受数学本身发展规律的推动，即在逻辑力量的推动下，产生并发展新的数学理论。这样产生的数学理论，如果长期找不到应用，尽管它在逻辑上自洽，人们对其兴趣将逐渐淡化，甚至将其视为符号游戏。所以，数学发展的历史本身，也说明了社会实践对数学发展的重要性和用其检验数学真理的必要性。

对现代数学中的重要概念和理论真理性的分析是一个非常复杂的问题。我国徐利治和郑毓信两位教授的论文《略论数学真理及真理性程度》（全文见《自然辩证法研究》1988年第1期）给出一个别开生面的回答。徐、郑二教授根据马克思主义的真理观对现代数学给出了一个综合而又定量的评估其真理性程度的方法，提出了数学真理性有两个层次：模式真理性和现实真理性。现实真理性是指数学理论是现实世界中量性规律的正确反映，即一个数学理论在人们的社会实践中得到了成功的应用，就表明它已受到实践的检验，说明它具有现实真理性。对于模式真理性，需要多说几句。

“模型法”是建立数学体系的基本方法（见4.6节）。正因为如此，有的数学家（如怀特海）才把数学定义为“研究模式的科学”。现在不同的数学分支实际上都是关于不同的数学模型的理论体系。任何一个数学模型，或者从实际问题中直接抽象而来，或者经过多次抽象而来，或者出于数学美的考虑，总之不是数学家随心所欲的杜撰。数学模型一旦建立并取得公认，便成为数学家施展才能、展开研究的对象，犹如中国象棋，棋规已定，棋谱就成为棋手研究的对象一样。建立不同的数学模型就像确定不同的运动项目和相应的竞赛规则，而对数学模型开展研究（如证明一个个定理）就像根据体育项目的竞赛规则研究克敌致胜的攻防战术。如果对一个数学模型的研究有助于人类认识的深化和方法论的进步，就不能看成是脱离实际的数学游戏，就说它具有模式真理性。

数学作为一门科学，其目的说到底是为人们认识世界和改造世界服务的。徐、郑二教授强调了现实真理性是主要的，指出在任何时候都应将它放在首位。但是现实真理与模式真理不能截然分开，都是历史范畴。数学的历史表明，昨天的模式真理就是今天的现实真理。古希腊的圆锥曲线论，17世纪的虚数，19世纪上半期的非欧几何等都是例子。今天的模式真理，一般地说，也将是明天的现实真理。当然，也应看到，有些纯数学命题，如数论中某些猜想，即使得到解决，其本身将来也不见得有多大的“实用”价值。但是对其研究能带动其它数学的发展，若能解决，则可反映研究者的数学水平，其意义绝不会小于奥运会上任何一块金牌的分量，因此，对其研究也有重要的意义。再如，集合论中基数大于f的超穷概念，恐怕到任何时候也找不到它们的现实原型，但它们将作为数学文化的结晶，作为人类“最美的花朵——思维着的精神”的创造物而永存，犹如艺术品中的“维纳斯”永存一样。数学科学本来具有实用和文化两种密不可分的价值，但

在不同的历史时期，人们对它的价值取向并不相同。比如，希腊人重视它的文化价值，而罗马人则重视它的实用价值。今后，随着它的发展，文化价值越来越重要。

4.5 数学中的悖论问题

1. 悖论概念

科学中的悖论的原意是“悖理”，是“悖于情理”的简称。在科学的发展中，如果新思想同公认的传统思想相矛盾，最初常常被视为悖论。哥白尼的日心说和达尔文的进化论提出之初在神学家和多数人看来就是悖论。一个悖论的产生常常是已有的定型理论局限性的暴露，同时也常常是人们的认识即将进入一个新阶段的预兆。因此，科学中任何一个悖论都是科学发展的产物，均属于一定的历史范畴；通常都是相对于一定的理论体系或认识水平而言的。

悖论的表现形式是矛盾，即新理论同旧理论的矛盾，如日心说是同地心说的矛盾，进化论是同神创论的矛盾等。因此，科学中的悖论就是哲学中的矛盾。但是悖论侧重命题的悖理性，认识论的味道比较浓厚。

在一切科学领域中，数学历来被人们视为严格、和谐、精确的典型学科。一般认为，数学中的命题是绝对可靠的，数学结论就是真理。希尔伯特曾经问道：“如果连数学思考都失灵的话，那么应该到哪里去寻找可靠性和真理性呢？”①但是数学的发展从来不是完全直线式的，它的体系并不是永远和谐的，而常常出现悖论，特别是一些重要悖论的产生，自然地引起人们对数学基础的怀疑以及对数学可靠性信仰的动摇，甚至出现所谓的“数学危

① 希尔伯特：《论无限》，载《数学哲学论文集》，第141页。

机”。人们常说的西方数学史上的三次危机皆由数学产生悖论而引起。数学史表明，数学家对悖论的研究和解决（这一过程可能很长）却促进了数学的繁荣和发展。可见数学中悖论的产生，不单是给数学带来危机和失望，也给数学的发展带来新的生机和希望。

数学中的悖论是形形色色的。为了讨论方便，通常将其分为两类。一类是由主观认识的局限性或错误造成的，也就是在它们的构造中隐含有某些错误的前提的悖论，称之为“内涵悖论”，例如，毕达哥拉斯悖论和伽利略悖论等。另一类是前提并没有明显错误，但经过严格的逻辑分析之后得出两个互相矛盾的命题的悖论，称之为“逻辑悖论”，例如，罗素悖论等。当然，这样的区分只有相对的意义。因为内涵悖论是以逻辑悖论为前提的，而逻辑悖论也有一定的内涵。两类悖论都是由人的认识的局限性造成的。由于内涵悖论的构造中含有某些错误的前提，所以随着数学的发展和人们认识的提高，这种悖论是可以彻底排除的。因此，数学哲学所研究的悖论主要是逻辑悖论。这种悖论，包括在同一个理论体系内部同时证明了两个互相矛盾的命题（如康托尔悖论），或者同时证明了两个矛盾命题是等价命题（如罗素悖论），还有由假设其真而推出其假、而由假设其假又推出其真（如格里林悖论）等。如果说在19世纪中期以前，内涵悖论对数学思想的影响较大，那么从19世纪后期以来，逻辑悖论对数学思想的影响更为显著。

悖论虽然早在古希腊和我国先秦已经出现，在数学发展的漫长岁月中，悖论也曾被历代数学家和哲学家不同程度地思考过，但是悖论成为数学和逻辑学不得不认真研究的重要课题却是本世纪以来的事情，至今仅有90年的历史。对悖论的研究已成今天数学哲学的组成部分。随着数学的发展和抽象性的提高，这方面的研究越来越显得重要。

2. 19世纪中期以前数学中的悖论

数学本体论问题历来被哲学家和数学哲学家所重视。在19世纪以前的两千多年的历史时期内，数学虽有毕达哥拉斯和柏拉图先验主义的思想及其影响，但是，在这个时期内，数学的主要成就是算术、代数学、几何学和微积分，而这些学科的客观性是显然的，也是当时数学家公认的。在这个时期内，总的说来数学是一门经验的学科，所以，那些不符合人们的经验或传统公认的观念常常被认为是悖论，并受到反对，如由数系的扩张所产生的新数（主要是虚数）以及非欧几里得几何的产生均受到反对。

正有理数是人类认识最早的数，也是数的概念扩张的出发点。同今天中学数学教科书的逻辑顺序不同的是，在历史上数的概念的第一次扩张不是由正数到负数，而是由有理数到无理数，这就是古希腊时“不可公度的线段”的发现。所谓“不可公度的线段”是指它的长度不能用有理数表示的线段。这就同毕达哥拉斯学派“实在是数的摹仿”的哲学信仰相矛盾，因而被视为悖论，即所谓的“毕达哥拉斯悖论”。这一悖论的出现，使毕达哥拉学派的哲学产生严重的危机。从数学角度而言，也是一次数学危机。因为任何量，在任何给定的精确程定范围内，均可表示成有理数。这不仅在古希腊时是被人们普遍接受的信念，就是在测量技术高度精密的今天，这个论断也是正确的。但是居然可以证明边长为1的正方形的对角线不能用有理数表示，即证明了“不可公度的线段”的存在。这简直是违反常识而又“荒谬”的事，而要承认这一“荒谬”的结果该是多么地困难啊！因而发生了数学史上第一次数学危机。我国一位数学家指出，“说它是数学的第一次危机，绝不是言过其词，而是非常恰当的。”① 希腊人把这种数称为“无声的”或“无法表达的”数。中世纪时阿拉

① 莫绍揆：《数学三次危机与数理逻辑》，载《自然杂志》1980年第6期。

伯数学家阿尔·花拉子模把方程的这种根称为“聋根”或“哑根”。意大利的莱昂纳多把这类数贬称为“没有理的数”即“无理数”，此名一直沿用至今。直到17世纪末，包括帕斯卡、巴罗和牛顿在内的大部分数学家对无理数仍持否定态度，仅把它们看作表示几何量的一种符号，认为它们离开连续的几何量便不能存在。

西方在16世纪前后的大约两百年的时间内，在方程论的研究中不仅遇到无理数，而且还遇到负数和虚数。

负数的出现，人们提出了一些疑问。例如，当时认为数“0”是“没有”的符号，而负数又小于0，他们问道：怎么有比“没有”还小的数呢？所以认为负数是一个古怪的数。例如瓦里斯虽然承认负数，但认为负数应大于无穷大。① 再如，按已有乘法的定义，$-ab$是$-b$(a、b为正数）个a相加，他们问道：用$-b$作乘数有什么实际意义呢？还有，既然认为$-1<1$，那么等式$-1/1=1/-1$就更加不可思议。帕斯加的密友、神学家和数学家阿尔诺就以此为理由反对负数；莱布尼茨也认为这个反对意见是合理的。所以在16世纪以后相当长的一段时期内，数学家把负数称为“错的数”或“荒谬数”；把方程中的负根称为“假根”。在整个18世纪，虽然也应用负数，但是却把负数仅仅看成是没有客观内容的符号。

虚数出现后引起人们更多的怀疑，并给予种种不同的名称：卡尔丹诺称其为“诡辩量”，纳皮尔称其为“实数的鬼魂”，笛卡尔称之为“虚拟的数”，莱布尼茨称它为“是介于存在和不存在之间的两栖物”等。直到19世纪，一些著名的数学家(如欧拉)仍把负数和虚数看成是“不可思议”的，是“幻想中的数”。

---

① 瓦里斯在其《无穷的算术》(1655)一书中论证说：当a为正数时，比值$a/0$为无穷大，故当比式a/b中的分母b为负时，它必定大于无穷大。

非欧几里得几何同传统的欧几里得几何在直观上是完全相悖的。由于它是超前发现，所以在它产生的初期作为悖论受到普遍的反对。有人说它是“晦涩的、不可思议和神秘的学说”，说能够想象这一学说无异于“把黑的想象成白的，把圆想象成方的”，说它纯粹是一幅“几何漫画”，说它的存在是对“几何的讽刺”等。

除了上述由于数系的扩张所产生的新数和非欧几何产生初期曾被视为悖论外，无穷进入数学所产生的悖论更多，它们对数学思想的影响也比较大，数学史上的三次危机实际上都是由无穷进入数学所引起的。

无穷在古希腊时已经进入数学。数学中的无穷有潜无穷与实无穷两种型式。芝诺的“二分法”、“阿基里斯追龟”以及《庄子》中的“一尺之棰”等是潜无穷思想；西方古代的原子论学说和《庄子》中的“大一”、“小一”概念等是实无穷思想。由于芝诺的四个著名的疑难既反对潜无穷（“二分法”和“阿基里斯追龟”），又反对实无穷（“飞箭”和“运动场”），人们莫衷一是，称之为“芝诺悖论”。从那时开始，在无穷的问题上数学家和哲学家实际分成两派：亚里士多德、库萨的尼古拉、高斯以及现代直觉主义者是潜无穷论者；柏拉图、康德、黑格尔、康托尔以及逻辑主义者是实无穷论者。数学中无穷的历史实际是潜无穷和实无穷思想在数学发展中此长彼消、“各领风骚数百年”的历史，它们在数学中的合理性问题，是本世纪数学哲学所讨论的热点之一。

毕达哥拉斯悖论是由数的概念的扩张——由有理数到无理数而产生的悖论。由于无理数不能用有限小数或无限循环小数表示，所以这一悖论实质上也是无穷进入数学而产生的悖论。因此，第一次数学危机也是由于无穷进入数学而产生的危机。

古典数学名著《几何原本》的第一个注释者普罗克洛斯看到

圆的直径把圆分成两个半圆，而圆的直径有无穷多，所以他认为半圆的数目应当是两倍的无穷多。按当时的无穷思想，无穷应当是相等的，于是产生了“一个无穷大等于两个无穷大”的悖论，被人称为普罗克鲁斯悖论。

亚里士多德发现，在两个同心而半径不相等的圆周上有相同的点数（图4.1），被称之为亚里士多德悖论，即“大小不同的两个圆之周长相等”的悖论。这个悖论被中世纪众多的学者所注意。伽利略在1638年所写的《两种新科学的对话》一书中，曾固定两个半径不相等的同心圆，再将其旋转一周（图4.2），并认

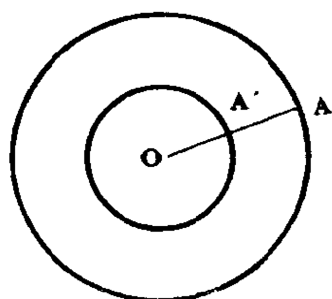


图 4.1

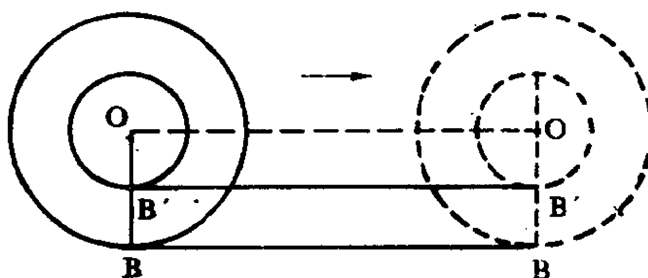


图 4.2

为证明了这两个圆的周长相等的悖论，这是亚里士多德悖论的另一种证明。伽利略在同一书中还用今天的一一对应方法证明了整数同平方数相等：

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots, \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & \cdots\cdots。\end{array}$$

因平方数1、4、9、16、25等等为整数的一部分，于是得出“部分等于全体”的悖论，被人称为伽利略悖论。

上述诸命题之所以被视为悖论，均是由于人们认识的局限性造成的。数学中任何一个命题，都有它成立的条件，离开了命题成立的条件而乱用，就有可能导致荒谬或产生悖论。由数系的每

次扩张而产生的悖论，都是把正整数的性质绝对化的结果。例如，如果坚持正分数$\frac{m}{n}$的分子m越大或分母n越小时分数值就越大，则负数就是悖论；如果坚持$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$，则虚数就是悖论；如果坚持过直线外一点只能作一条直线与已知直线平行，则非欧几何就是悖论。同样，如果把有限量的重要性质——“部分小于全体”绝对化并把这个性质强加于无穷，则实无穷就是悖论等。随着人们认识的提高，当我们认识到分数值$\frac{m}{n}$之大小问题和$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$仅适用于正数而不适用于负数和虚数时，由数系的扩张而产生的悖论就自然地排除了。当我们认识到“部分小于全体”仅适用于有限量而不适用于无穷量时，普罗克洛斯悖论和伽利略悖论等也就自然地得到解决。这就是我们在本节开始所说的“悖论均属于一定的历史范畴”的原因。

在数学发展的历史上，尽管两种无穷——实无穷和潜无穷在古希腊时均已提出并逐步渗入数学，但是直到16世纪，总的说来潜无穷居于优势。这是因为：第一，由欧多克斯和阿基米德所建立的穷竭法在解决许多实际问题（如计算面积和体积等）时取得重要的成功，而穷竭法则主要是潜无穷思想。第二，同亚里士多德思想有很大关系。亚里士多德不仅是当时百科全书式的学者，而且也被中世纪的经院哲学家树为权威，而亚里士多德则是一个潜无穷论者。第三，更主要的是实无穷在应用中产生了许多悖论，促使人们放弃实无穷。所以在16世纪以前，是潜无穷居主流的时代，自然地是实无穷受到冷遇的时代。

文艺复兴时期是科学技术开始面向自然、重视社会效益的时期，因而获得重大发展。科学和技术的发展，直接或间接向数学提出两类问题：“求积问题”及其反问题——“切线问题”。16、17世纪的学者曾经提出种种不同的“求积法”和“切线法”。这些方法虽然形式不同、名称各异，但都比较实用，应用它们能

比较容易得出结果。在逻辑严格性和应用的简便性不可能兼顾的情况下，当时的学者大都宁愿放弃前者而采取后者。经过将近两个世纪的酝酿，终于在17世纪末期产生了牛顿和莱布尼茨的微积分。这个微积分完全以实无穷小为基础：作为微分学的中心概念的“导数”是两个实无穷小之“商”（dy/dx）；作为积分学的中心概念的“积分”则是无穷多个实无穷之“和”（$\int dy$）。牛顿和莱布尼茨把实无穷的应用提高到空前的高度。数学家希尔伯特把牛顿、莱布尼茨的微积分形容为一支关于“无穷的交响乐”。

关于实无穷小，人们自然地会问：它到底是零还是非零？如果$dx=0$，就得出$dy/dx=0/0$这一毫无意义的结果；如果$dx\neq 0$，无论dx如何小，则dy/dx只能是马克思所说的“预备导数”，而不是真正的“导数”。这就是所谓的**贝克莱悖论**。由于dx在牛顿和莱布尼茨的运算中是一个“招之即来，挥之即去”的神秘量，所以马克思才把牛顿和莱布尼茨的微分学称为“神秘的微分学”。对牛顿和莱布尼茨的积分学，人们仍然回到古希腊时芝诺的论证：把一个有限量x分解为无穷多个dx，如果$dx=0$，则其和为零；如果$dx\neq 0$，则其和应为无穷大。总之，无穷多个dx之和并不是原来的x。那么dx到底是什么数呢？因此，才有18世纪关于微积分的一场大辩论。

此外，18世纪，在无穷级数的运算中也出现了不少的荒谬结果（无妨也称为悖论）。例如，对于无穷级数，$1-1+1-1+\cdots\cdots$，有人认为它是0，有人认为它是1，更有人认为它是$\frac{1}{2}$，都有自己的“理由”。再如，数学家还“证明”了：

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4}, \qquad (A)$$

$$\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+\cdots=0, \qquad (B)$$

$$1+2+4+8+\cdots=0, \qquad (C)$$

等等。对于（A），自然数的和竟然等于分数；对于（B），无论x是什么数，均不应为0；（C）的悖论性质就更加明显。值得注意的是，这些荒谬的结果竟然出现在像欧拉这样一些著名数学家的工作之中。看来无穷大、无穷小以及无穷级数进入数学简直使数学乱了套。所以，直到18世纪，无穷仍被数学家视为禁区，人们遇上它就得小心翼翼。

19世纪初期，以柯西的工作为标志，对牛顿和莱布尼茨的“神秘”微积分进行了彻底改造，基本上成为今天的形式。在柯西那里，无穷小不是通常意义下的极小的量，而是一个以零为极限的变量；导数dy/dx不是两个实无穷小之商，而是定义为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x};$$

在区间[a，b]上的积分也不是无穷多个无穷小之和，而是定义为

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i。$$

这样，在牛顿和莱布尼茨的微积分中关于无穷小的悖论得到满意的克服。同样，无穷级数只能在判定收敛的条件下才能用极限求和，于是无穷级数中的荒谬结果也得以避免。

由此可见，在19世纪中期以前，由于无穷进入数学而产生的种种悖论，都是由人们认识的局限造成的，人的认识提高了，数学发展了，悖论也就消除了。

3．19世纪末期以来数学中的悖论

19世纪，极限理论和实数理论的建立使数学分析的基础得以巩固，也使延续了一个多世纪的第二次数学危机得以解决。但严格的极限理论是以集合论为基础的。前已述及，集合论刚产生时曾受到一些权威人士的严厉批评，但随着时间的推移，人们逐渐认识到它的重要性，并给予充分肯定，然而，在人们的一片赞扬声中，康托尔的集合论却发现了不少的悖论，特别是以1902年发现

的罗素悖论为标志，爆发了西方数学史上的第三次危机。

集合论中的悖论，一般按其性质的不同区分为两类①：语义学悖论和数学-逻辑悖论。前者总是由命名、定义、真、假等概念构成的；后者是由数学或逻辑学中的概念构成的。

（1）语义学悖论。

语义学是研究语言或符号与所指谓对象的关系的一门学科。这种研究在现代西方哲学中占有重要的位置，被西方哲学家视为现代哲学的标志。

最早的语义学悖论是公元前6世纪被人发现的**说谎者悖论**。它的原始命题是“所有克里特人总是说谎者”。严格地说，这句话还不足以构成现代意义下的悖论。但是，如果对其作某些修改就构成悖论。比如，我们在这里写出如下的句子：

“在这一行里所说的这句话是假的”

（“这句话”就是引号中句子的本身）如果肯定其真，就得出其假；反之，如果肯定其假，则又得出其真，于是构成悖论。

语义学悖论，除了古老的说谎者悖论外，比较著名的还有“理查德悖论”和“格里林悖论”等。

理查德（J.Richard）**悖论**是1905年提出的，它有不同的表述形式，我们表述如下：

任何一个自然数的性质都可以用有限长的语句来描述；有限长的语句可以按某一规则（比如，按字数的多少用字典的规则）加以排列，即对自然数的所有性质加以编号。由于编号用的数也是自然数，因此，又可考虑编号数本身是否具有它所代表的性质问题。显然有两种情况。一种是，编号数本身恰好具有它所代表的性质，例如，关于素数的定义编在第7号，而7是一个素数。这样的数称为“非理查德数”。另一种是编号数本身并不具有它

① 这样的分类，是1925年英国逻辑学家兰斯（Ramsey）提出的。

所代表的性质，例如，关于奇数的性质编在第14号，而14是偶数。这样的数称为“理查德数”。“理查德数”也可以定义为“与所代表的性质不相符合的自然数”。这样，自然数的“理查德性”也可用有限长的语句来描述。于是，可以考虑这样的问题：与“理查德性”相对应的编号数是否具有“理查德性”？容易推出，一数为“理查德数”，当且仅当，它不是“理查德数”。矛盾！

格里林（K.Grelling）**悖论**是1908年提出的，其大意如下：

在语言学中所用的形容词有两种。一种为“抽象的”、“观念的”和“中文的”等均适用于自身：“抽象的”本身性质仍是抽象的；“观念的”本身也是观念；“中文的”本身仍是中文的。这种形容词称为“自状的”。另一种如“圆的”、“单音节的”和“英文的”等均不适用于自身：“圆的”本身不是圆的；“单音节的”本身是多音节的；“英文的”本身是中文的。这种形容词称为“非自状的”。现在要问：“非自状的”这一性质是自状的，还是非自状的呢？如果肯定它是非自状的，则它是自状的；反之，如果肯定它是自状的，则它又是非自状的。矛盾！

美籍波兰逻辑学家塔斯基对语义学悖论进行了充分的研究。他的目的，不单纯是为了排除悖论，主要是建立“科学的语义学”，以区别于原来“朴素的语义学”。我们的兴趣在于塔斯基语义学研究的数学意义。

对于足够丰富的数学系统来说，在元语言中所定义的任何命题集，只要它由真命题组成，在语义的意义下都一定是不完备的。特殊地，相对于可证明的命题集而言，这种不完备性表明了必定存在有不能证明的命题。这样，就从另一角度证明了数学系统的不完备性。塔斯基指出，这种不完备性揭示了“在演绎方法和演绎理论本身之间所存在的鸿沟”。塔斯基虽然已经证明，对

于足够丰富的数学系统来说，要给出令人满意的真理的定义是不可能的，但他同时又证明了在较小的范围内，这种定义是可能的。塔斯基说："真理的定义和语义学的建立使我们能够将平行的正面的结果与方法论中所得出的重要的反面的结果加以比较，从而也就填补了所揭示的在演绎方法和演绎科学这一大厦之间的鸿沟。"①

（2）逻辑-数学悖论。

逻辑-数学悖论主要指康托尔集合论中的"布拉里-弗蒂（Burali-Forti）悖论、康托尔悖论和罗素悖论，它们分别发现于1897年、1899年和1902年。前两个分别是关于集合论中序数理论和基数理论的悖论。对于集合的序数和基数，集合论的创始人康托尔曾作过如下的直观描述：对集合S（实际是良序集合）进行两次抽象，第一次是从S的元素中抽去它的质的特性，仅保留元素之间的次序关系，这就得出集合S的序数，记为$\overline{S}$；另一次是再抽去元素之间的次序关系，仅保留量的特性，就得出S的基数，记为$\overline{\overline{S}}$。康托尔深信他的这项工作是正确的，但是后来却发现矛盾，这就是布拉里-弗蒂悖论和康托尔悖论。

布拉里-弗蒂悖论 根据康托尔的序数理论可知：每一良序集合必有一序数；小于并包含某已知序数a的所有序数组成的集合为良序集合，其序数为a+1。设ω为一切序数所组成的集合。可以证明，ω是良序集合，从而有一个序数Ω。但因为ω是一切序数所组成的，故Ω应包含在ω中，由上述序数理论，ω的序数又应为$\Omega+1$，即Ω不是ω的序数。矛盾！

康托尔悖论 根据康托尔定理，可以证明集合S的所有子集组成的集合PS的基数大于S的基数，即

$$\overline{\overline{PS}}>\overline{\overline{S}}。\qquad (1)$$

① 参见夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第161页。

假设S是所有集合组成的集合（即S为大全集），于是PS 也是S的子集，由康托尔的理论应有

$$\overline{\overline{PS}}<\overline{\overline{S}}。\quad (2)$$

（1）与（2）矛盾。

罗素悖论 要回答的问题是："一切不包含自身的集合所组成的集合"是否包含自身的问题。如果说它不包含自身，那么它就应当是这个集合的元素，即包含自身；如果说它包含自身，即属于这个集合，那么它又不应包含自身。用符号表示就是：

$$R\in R\equiv R\overline{\in}R。$$

即命题$R\in R$等价于它的否定命题$R\overline{\in}R$。

为了使罗素悖论通俗化，罗素在1919年提出了著名的"理发师悖论"。说的是在某城镇有这样一位理发师，他声称自己是给该城镇所有不给自己理发的人理发，而且只给这些人理发。现在的问题是：这位理发师是否给自己理发呢？容易发现，这位理发师应该给自己理发完全等价于他不应该给自己理发。矛盾！

由于集合论在当时已成为现代数学的基础，所以集合论产生悖论，不单是影响集合论本身，而且几乎影响到整个数学。不仅如此，还影响到逻辑学。因为只要稍作变动，罗素悖论就可以在纯逻辑的形式下得到构造。因此，罗素悖论的产生不仅表明集合论中包含矛盾，而且也表明逻辑学中也有矛盾。人们历来认为数学和逻辑是两门极为严格的科学，现在竟然遇到如此严重的困难，这使西方哲学界、数学界和逻辑学界大为震惊，他们不得不宣布数学再一次遇到危机。正如数学史家M.克莱因所说："正当数学家们不但接受了集合论并且还有大部分经典分析的时候，这些矛盾动摇了他们。作为逻辑结构，数学已处于一种悲惨的境地，

数学家们以响往的心情回顾这些矛盾被认识以前的美好时代。"①

悖论古已有之，人们对其研究虽有悠久的历史，但是，只有集合论出现悖论，特别是罗素悖论的提出，人们对悖论的研究才进入一个新的阶段。本世纪以来，数学哲学家为了消除集合论中的悖论，提出了种种方案，公理化集合论中的ZF系统是较早的方案之一。

ZF系统是德国数学家策梅罗于1908年提出的，以后经过大约30年，其间经过弗兰克尔、斯科朗等人的多次改进，才比较完善。策梅罗认为，集合论之所以出现悖论，是因为使用了太大的集合，特别是使用了"大全集"。因此，为了避免悖论，必须对集合加以限制。为此，必须抛弃"概括原则"，因为用概括原则就立刻推出大全集的存在。一般认为，在一定的意义上，ZF系统不仅消除了原集合论中已发现的悖论，而且也保留了原集合论中一切有价值的内容。

但是，ZF系统并不是公认的最好方案。比如，冯·诺伊曼就认为，ZF系统不可取，因为它排斥了许多集合。冯·诺伊曼认为，产生悖论的原因不在于使用了太大的集合，而在于这些太大的集合被用作其它集合或自身的元素。他于1925～1926年，按照这个思想建立了一个公理化集合理论。贝尔纳斯与哥德尔先后于1931年和1948年作了修改，形成今天所谓的NBG系统。

关于ZF系统和NBG系统的区别，《西方数学哲学》一书的作者作过一个巧妙的比喻：康托尔的集合论既包含了"无坚不摧的矛"（指任一集合S都可以扩充到更大的集合PS，从而集合的扩张是无限制的），又包含了"能抵挡一切的盾"（指其中有一个包含一切集合的集合）。因此，这个理论不可避免地要产生悖论。为了避免悖论，必须或者"弃矛存盾"，或者"弃盾存

① M.克莱因：《古今数学思想》第4册，第293页。

矛”，二者只能取其一。ZF系统是“弃盾存矛”，因为它保留了任意集合都可以任意扩张，排斥了一切集合的集合，避免了悖论。NBG系统则是“弃矛存盾”，因为它虽然保留了一切集合的集合（更确切地说是“类”），但不允许再作进一步扩张，即不能以其为元素而构成集合，因此也避免了悖论。

恩格斯曾经说过：“无限是一个矛盾，而且充满种种矛盾。无限纯粹是由有限组成的，这已经是矛盾，可是事情就是这样。”①我国数学家徐利治、朱梧槚称之为**恩格斯悖论**或恩格斯矛盾论。恩格斯这一有限生成无限思想的最简数学模型就是经典数学意义下承认如下两个命题同时成立的自然数集合N：

命题A：N中任何自然数都是有限序数；

命题B：N中所含自然数的个数为无穷多。

我们设想把所有的自然数都装入一个封闭的口袋，且口袋中除了自然数外别无它物。再设想由1开始从小到大依次去数自然数，则每次所数及的那个自然数的数值恰好就是已被数过的自然数的个数，无论数到何时，“个数”同“数值”总是同步增加且永远相等。按康托尔的实无限观点，这个过程能进行完毕。但由命题A，任何自然数均为有限数，因此被数的自然数个数不可能为无穷多，这同命题B矛盾。反之，根据命题B，口袋中的自然数的个数为无穷多，因此自然数的数值不可能恒为有限数，这又同命题A矛盾。这种矛盾实际上是数学中两种对立的无穷观（潜无限与实无限）的反映。因为一方面，命题B肯定了N是已经完成的潜无限；另一方面，命题A又断言N之一切元素皆为有限序数，而任何有限序数都是潜无限延伸所能达到的，这又等于将N的一切元素又纳入变化过程之中。在经典数学中，既然区分了两种无限，但又通过命题A和命题B将二者混淆，这是上述矛盾的

---

① 恩格斯：《反杜林论》，第48页。

实质所在。

徐利治于1980年在一篇论文中提出了“双相无限”(double-phased infinity)理论，他说：“任何无限过程乃是实无限与潜无限的对立统一体，两种无限概念只不过是对同一无限性对象的两个侧面的模写或反映。……数学上每一无限过程，本质上都是双相无限。”① 徐先生用双相无限理论对恩格斯悖论作了解释，这一理论实际是辩证无穷观的数学化。

数学中两种无穷观的产生和对立由来已久。长期以来，由于数学思维要求单一性和确定性，所以当无限作为数学对象时，数学家要么按照潜无限观点去思维，要么遵循实无限去考察，非此即彼。实际上无限的对象具有“双相”性：既不存在没有实无限的潜无限，也不存在没有潜无限的实无限；任何潜无限都是某个实无限的片断，而任何实无限又都是在某潜无限的基础上经过飞跃完成的无穷总体。这样的无穷总体既是经过飞跃完成的，自然地，它的一切元不可能全都纳入产生它的潜无穷过程。比如，在有限的1，2，3，…形成自然数集合N的同时，必须引入非有限的序数。

被恩格斯所揭示出的无限的矛盾，无非是说有限同无限不是绝对的对立，而是从有限可以过渡到无限。因为自然数序列的无穷进展，不仅仅有量的增加即量变过程，同时也有质的变化即飞跃过程。在飞跃阶段，尽管序列中的成员（自然数）仍为有限数，但是有限数的增长经过飞跃就否定了自身的有限性——达到无限。在飞跃阶段，不仅要承认“非此即彼”，还应承认“亦此亦彼”。

4.悖论的认识论涵义

在数学的历史上，产生悖论是一个客观事实。面对这一事

① 徐利治：《数学方法论选讲》，第118页。

实，在如何理解悖论的实质这一问题上，西方流行两种完全对立的观点。

一种是“主观错误论”。这种观点认为：客观世界本来是和谐的，是不存在任何矛盾的；科学中的悖论本来是可以避免的，出现悖论是完全由主观错误造成的，是发生了不应该发生的错误；如果已经出现了，经过对主观认识的修正也是可以排除的。意大利的鲁契奥·柯莱蒂就持这种观点。他认为：“对于科学来说，矛盾永远而且只能是应予以排除的‘主观错误’。科学包含了无矛盾原理。对于科学来说，是不存在客观矛盾，即现实中的矛盾的。”① 数学既是严密、和谐、精确的典型学科，出了悖论，持这一观点的人自然地想到一定是在什么地方搞错了。本世纪初期，在数学基础研究中的几个主要学派实际上都是在这一观点的支配下进行研究的。他们力图通过自己设计的方案来纠正“主观错误”，试图一劳永逸地消除悖论对数学的威胁。

另一种观点是“特殊真理论”。这种观点认为数学出现悖论并不是什么主观错误，而是一种正常的现象。他们认为，包括数学在内的科学都应从“无矛盾原则”的束缚下“解放”出来。例如，西方的“不协调逻辑”者就持这种观点。他们认为，“从本体论上讲，世界非常可能是自身不协调的”，因此，他们对悖论的态度不是采取消除的办法，而是设法“圈禁”，使其“局部化”，不要使它“泛滥成灾”。由于采取圈禁的方法不同，所以就有不同的“不协调逻辑”。② 也有人认为：悖论是客观事物辩证性的直接表现。例如，保加利亚的S.彼得洛夫认为：“逻辑悖论不是

① 转引自杨熙龄：《“矛盾原理”和辩证法》，载《国外社会科学》1981年第5期。

② 参见杨熙龄：《非古典逻辑》、《“不协调逻辑”小议》，载《国外社会科学》1980年第12期、1981年第7期。

错误，而是特殊的客观真理。”① 持这种观点的人还嘲笑了那些“把矛盾视为鬼怪”和在悖论面前“迷信般恐惧”的数学家。

马克思主义的认识论认为，任何已经建立起来的理论都是相对真理，都有认识上的局限性，从而只能适用于一定的范围，超出了这个范围就构成主客观矛盾，在一定的条件下，这种矛盾就可能表现为悖论。上边所说的由于数系的扩张而产生的新数和非欧几何学被视为悖论均属这种情况。由于无穷进入数学而产生的亚里士多德悖论、普罗克鲁斯悖论和伽利略悖论等，因在它们的构造中含有某些错误的前提，所以当认识提高以后，修改其错误的前提，悖论也就排除了。例如，只要认识到“全体大于部分”仅适用于有穷集合，而不适用于无穷集合，上述有关无穷的悖论就排除了。

“主观错误论”者虽然在承认悖论是由认识的局限性造成的这一点上有合理成分，但是他们没有进一步揭示产生悖论的认识根源，似乎数学其所以产生悖论是数学家们一时的疏忽，犹如会计工作者算错了帐目是一时的疏忽一样。所以他们的认识是肤浅的，没有真正抓住悖论的本质。

那么能否把数学中的悖论看成是事物的辩证性在数学中的表现，悖论是“特殊的客观真理”呢？显然不能。比如，在牛顿和莱布尼茨的微积分的无穷小悖论中，人们所看到的只有逻辑上的混乱，这同无穷小的辩证性毫无共同之处。所以应当承认，贝克莱对当时微积分的质疑（我们撇开他利用微积分的不足为神学辩护这一要害问题不谈）不是没有道理的。如果按“特殊真理论”者的观点，就无法解释柯西的微积分代替牛顿、布尼茨微积分的历史必然性，也抹煞了本世纪以来许多数学哲学家对悖论研究的历史功

① S.彼得洛夫：《黑格尔的矛盾真理问题》，载《自然科学哲学问题丛刊》1980年第1期。

绩。“特殊真理论”尽管看到了许多悖论的前提没有什么错误，但却混淆了客观事物的辩证性与形式矛盾的界限，默许数学中悖论的荒谬性的永恒存在，否认了去积极地研究解决的必要性。所以这种观点不利于数学的发展。

针对以上两种观点的片面性，我国有的数学哲学家从马克思主义的认识论出发对悖论的实质作了阐述。他们认为，客观事物本来是诸对立环节的统一体，但由于主观思维方法上的形而上学性和数学受形式逻辑方法的限制，客观实在的辩证性在认识过程中常常受到歪曲——对立统一环节被割裂，并片面地夸大，以致达到绝对、僵化的程度，从而辩证的对立统一成了绝对的对立，如果再把它们机械地联系在一起就可能出现悖论。所以他们认为：“悖论实质上是客观实在的辩证性与主观思维的形而上学性及形式逻辑方法的矛盾的集中表现。”① 本书1.3节中所说的芝诺悖论、抛球悖论以及本节所说的恩格斯的无限悖论，实际上都是这样产生的。列宁的下述论断是深刻的。他说：“如果不把不间断的东西割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以划分，不使之僵化，那么我们就不能想象、表达、测量、描述运动。思维对运动的描述，总是粗糙化、僵化。不仅思想是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。”② 因此，人们在一定的认识阶段，对生动实在的认识都是一种简单化、粗糙化、僵化的认识，不如此就不可能有以往的科学。因此在科学中就不可避免地包含了对客观事物辩证性的某些歪曲，这种歪曲是产生悖论的认识论原因。

下面对无穷小悖论和数学-逻辑悖论作一简略分析。

无穷小悖论（贝克莱悖论）　根据数学中的极限理论，无穷

---

① 夏基松、郑毓信：《西方数学哲学》，第174页。

② 《列宁全集》中文第2版第55卷，第219页。

小是极限为零的变量，或者说无穷小是变量的变化过程和变化结果的辩证统一。作为过程，它是潜无穷；作为结果，它又是实无穷。所以，无穷小也是潜无穷和实无穷的辩证统一：过程决定了结果，结果体现了过程。无穷小作为过程，它是非零，而作为结果，它又是零。所以割裂过程和结果并加以夸大，然后再机械联系起来，必然导致无穷小既是零而又是非零的悖论。当然，由于数学本质上是在形式逻辑的框架内活动的，它要求概念的明确性和一意性。就无穷小而言，必须明确它到底是零或非零的问题，而不能断言它既是零又不是零。因此，无穷小的辩证性不能用初等数学的观念得到合理的说明。因此，在科学的极限论产生以前的相当长的时期内，无穷小悖论成为科学家们争论的重大问题。

数学-逻辑悖论　主要指康托尔集合论中的布拉里-弗蒂悖论、康托尔悖论和罗素悖论。对这些悖论也可作类似分析。实际上集合在本质上也是辩证的：它既是一个完成了的对象，又具有无限扩张的可能性。也就是说它既是一种实在的对象，同时也是一种潜在的对象，即是过程性和完成性的辩证统一。但是，集合的这种辩证性在人的认识过程中，常常或是强调完成性忽视过程性，或是强调过程性而忽视完成性。如果把这两方面片面地加以分割，并加以夸大，然后再机械地重新联系起来，就构成数学-逻辑悖论。首先，在上述三个悖论中，都肯定了对象（集合）的过程性：在布拉里-弗蒂悖论中，通过某种良序集的构成来保证序数无限增大的可能性；在康托尔悖论中，是以幂集的构成来保证基数无限增大的可能性；在罗素悖论中，集合本身就有无限扩张的可能性。其次，在这三个悖论中又都包含了对于对象（集合）绝对完成性的肯定：在布拉里-弗蒂悖论中，是对由一切序数所组成的集合即最大序数集合的确认；在康托尔悖论中，是对最大基数集合即大全集的确认；在罗素悖论中则是对全集即不能再予以扩张的集合的确认。尽管上述两个方面都是合理的，但是毕竟是

对辩证统一的两个环节割裂和绝对化，如果再将它们机械地联系起来，就必然产生悖论。

当然，除了主观认识上的形而上学性以外，还由于数学是在形式逻辑的范围内活动的，这就要求对象的明确性和一意性。因此，当集合的辩证性无法在数学中直接得反映时，只能是选取其中一个方面。这样，数学就对客观对象的辩证性实行了不可分离的分离，最终导致悖论。

悖论既然是客观实在的辩证性同主观思维的形而上学性的矛盾的一种表现形式，而人的认识又不可能一次完成，因此，产生悖论就是不可避免的，试图一劳永逸地消除数学中悖论的一切努力必将失败。数学中悖论的历史也说明了这一点：已有的悖论消除了，又产生新的悖论。又由于人的认识是发展的，所以只要有悖论，迟早能获得解决。产生悖论——解决悖论——又产生新的悖论，这是一个无穷反复的过程，这个过程也是数学思想获得重要发展的过程。其次，悖论既然是主客观矛盾的一种表现形式，因此，为了消除悖论，只能是提高主观认识，克服认识过程中的局限性，就数学而言，就是发展数学，使之更加完善，更符合客观实际。所以解决悖论的过程就是发展人的认识（即发展数学）以克服历史局限性的过程。用黑格尔的话说就是："矛盾正是对知性的局限性的超越和这种局限性的消解。"① 因此，研究、解决悖论对于数学思想的发展就有一定的积极意义。那种把数学中的悖论视为"笑料"的观点是陈旧的、肤浅的；那种把数学视为"安全"的领域、认为数学中的悖论没有影响数学家的正常研究的观点是盲目乐观，也不符合实际情况。本世纪以来的数学哲学家正是意识到了这种重要性，所以才积极开展对悖论的研究，作出了令人钦佩的努力，并取得了一定的成绩。集合论的公理化就是对

---

① 黑格尔：《逻辑学》上卷，第27页。

悖论研究的直接成果。本世纪初期数学基础研究中的三大学派，虽然都没有实现自己为了避免悖论而设计的改造数学的方案，但是在他们的工作中却获得大量的新发现和新见解。例如，逻辑主义的类型论，直觉主义的能行性理论，希尔伯特的证明论等，都是直接或间接对悖论研究的产物。这些“副产品”反比三派预定的目标更为重要。被人称之为“数学和逻辑发展中的一个里程碑”的哥德尔不完全性定理，也是直接来源于数学基础中悖论的研究。这些成就都是今天数学大厦的组成部分，它从一个侧面说明研究悖论的重要性。可以认为，悖论的产生和对其解决是数学思想特别是数学基础发展的形式之一。

4.6 数学中的方法论问题

1.数学方法在方法论和数学发展中的地位

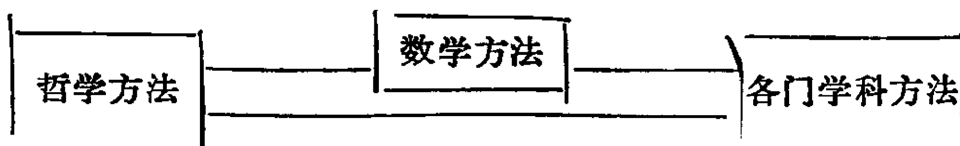
（1）数学方法在方法论中的地位。

方法论（methodology）或方法学，是认识世界和改造世界的方法的理论。它有三个不同的层次：哲学方法论、一般科学方法论和各门学科方法论。三者之间的关系是相互依存、相互影响和相互补充的对立统一关系。其中哲学方法论是各门科学方法论的概括和总结，是最一般、最普遍的方法论，对其它方法有指导意义。一般科学方法论是把科学发展的共同规律和研究方法作为讨论的对象，通常是科学哲学即自然辩证法的重要内容之一。各门科学除了应用哲学和一般科学方法以外，还都有自己特有的方法。

作为科学之一门的数学也有自己特有的方法。数学本身作为方法可应用于不同的科学部门。我国古代把数学称为“算术”，把解决具体问题的原则和步骤称为“术”，“术”就是方法。数学哲学中所谓方法，主要指数学本身在产生和发展过程中所使用

的较为普遍的方法。对这种数学方法作本体论和认识论的分析是数学哲学的内容之一。

本书在绪论中已经谈到，现代科学数学化的趋势越来越明显，以及数学作为横断科学的地位日益加强，因此，数学方法居于哲学方法和各门科学方法之间的横断地位。其间的关系用图表示如下：



数学作为认识改造世界的工具，被历代哲学家重视。古希腊的毕达哥拉斯和柏拉图分别把数学作为他们的世界模型和构造世界模型的工具。15世纪的库萨的尼古拉、18世纪的康德以及19世纪的黑格尔等哲学大师，常用数学论证他们哲学中比较困难的命题。数学作为科学的工具也为历代科学家重视。13世纪的R.培根认为数学是科学的大门和钥匙。在他的著作中，数学是整个自然科学的支柱。伽利略把自然界和整个宇宙看成一部巨著，而数学则是这部著作中的符号。他认为如果没有数学的帮助就无法读懂它。笛卡尔更相信数学方法的普遍性，认为数学“是所有其他知识的工具和源泉”①。马克思也认为，科学只有当它能够成功地运用数学的时候，才算达到成熟的地步。在科学数学化的现代，数学作为方法的重要性更加明显。

数学方法论的研究古已有之，亚里士多德提出的公理法经欧几里得的运用和希尔伯特的完善，不仅对数学，而且对现代某些自然科学都有重要的应用。本世纪以来，数学方法论逐渐引起人们的重视，例如，美国的波利亚和我国的徐利治、郑毓信等都有这方面的专著，拉卡托斯发展起来的证明和反驳的逻辑也有方法

① M.克莱因：《古今数学思想》第2册，第6页。

论的意义。

数学方法是多种多样的。在数学中任何一个方法的使用必须同时辅之以别的数学方法甚至其它科学方法。它们在不同数学分支的产生和发展中的地位也不尽相同，大致有以下三类：

其一，数学产生和发展的基本方法。这是数学在过去、现在和将来都不可缺少的方法。

其二，建立数学体系的方法。这类方法有不同的情况，有的方法仅用于建立数学体系(如公理法)，有的方法既可用于建立数学体系，也可用于解决具体的数学问题（如极限法和模型法）。

其三，数学各个分支中常用的具体方法。一般说来，它们随数学分支的不同而不同，本质上都是映射法在不同方面的运用。

（2）数学方法在数学发展中的地位。

不少著名数学家都对数学的发展作过生动的描述。有的把数学的发展比之为一棵参天大树，年年成长，主干胸围增加，分支增多；大树只有根深才能叶茂，在数学发展的同时，它的基础也在发展。也有人把数学的发展比之不同时期城市的建设规划，新布局比旧布局更宏伟、更合理。马克思主义的辩证法认为，否定之否定是自然界、人类社会和思维运动、发展的普遍规律。它通过三个环节（肯定——否定——否定之否定）、两次否定揭示客观事物发展的道路和方向，也揭示了数学发展的道路和方向。

在数学中，数和形是两个基本概念，一部数学史主要是数和形的概念产生和发展的历史。在人类的原始时代，数和形是结合在一起的。例如：天上一个太阳（数 1 与太阳结合在一起），人的一只手有五个指头（数 5 与一只手的指头结合在一起）等等。随着人们认识的发展，这种统一逐渐分化，产生了专门研究空间形式的几何学和专门研究数量关系的算术和代数。从 17 世纪开始，又在几何和代数定型、成熟的基础上，产生了用代数方法研究几何问题的解析几何学。在解析几何中，通过坐标系建立了数

和点、方程和曲线的有机联系，使数和形在新的基础上重新统一，这种统一是数学发展进入新阶段的转折点。

否定之否定通过三个环节、两次否定又表现为一个周期。每个周期的终点同时又是下一个周期的起点。由于在解析几何中引入了变量，所以开始了变量的矛盾运动。因此，解析几何又是变量数学的起点。在变量数学中，函数$f(x)$的导数$f'(x)$是通过两次否定得到的：第一次由“设差”而得到差商$\frac{\triangle y}{\triangle x}$，第二次由“扬弃差”而得到导数$\frac{dy}{dx}$即$f'(x)$。还可以通过否定之否定而得到$f'(x)$的导数$f''(x)$。这个过程可以继续进行，于是产生了微分学中高阶导数概念$f^{(n)}(x)(n\geqslant 2)$。

恩格斯说，在“求无限小总和的运算中，否定的否定表现的更加明显”①。函数$f(x)$在区间$[a, x]$上的积分$F(x)$也是通过两次否定得到的：第一次是“化整为零”而得到原函数$F(x)$的微分式$f(x)dx$，第二次是“积零为整”而得到原函数$F(x)=\int_a^x f(x)dx$，这个过程也可以继续进行。

今天所谓的欧氏几何学，从埃及人的测地术到欧几里得的《几何原本》，再到希尔伯特的《几何基础》；今天的代数学，从16世纪关于文字计算的理论到18世纪末期的代数方程论，再到19世纪以后的抽象代数；数的发展从有限到潜无限再到实无限；实无限又有不同的层次等等，都是否定之否定过程。

数学的发展过程就是不断地否定的过程。恩格斯指出，辩证法的否定，不是把“虫子踩死”，不是“写上又擦掉”，而是发展。②也就是说，否定有一定的方向，否定为其目的服务。在数

---

① 恩格斯：《反杜林论》，第135页。

② 参见恩格斯：《反杜林论》，第140页。

学中，通过不断否定就可变未知为已知，或从已有的结论得出新的结论。因此，数学中任何一个方法都是数学发展中实现否定的具体手段。反之，如果没有数学方法，数学就不可能进行任何形式的否定，数学就成了一潭死水，不可能有今天高度发达的数学。

需要说明的是，理解数学方法的运用就是辩证的否定，并不等于说懂得辩证否定就掌握了数学方法。比如，微分法与积分法虽然是马克思主义哲学中否定之否定的典型形式之一，但不等于说懂得哲学中的否定就掌握了微积分。恩格斯说得好："仅仅知道大麦植株和微积分属于否定的否定，既不能把大麦种好，也不能进行微分和积分，正如仅仅知道靠弦的长短粗细来定音的规律还不能演奏提琴一样。"① 对于所有数学方法都应如此理解。因此，发展数学既需要正确的哲学思想，但更需要数学家本身作艰苦的努力。哲学统率一切，但不能包办一切。

2.数学赖以产生和发展的基本方法

现代数学是一个内容丰富、体系庞大、分支众多而又互相交叉的学科群，它的每一个分支的产生和发展都离不开归纳和演绎、分析和综合以及在分析基础上的抽象，都离不开这些方法的综合运用，因此，这些方法是贯穿所有古代数学、近代数学和现代数学的基本方法。

（1）归纳法、演绎法、类比法。

归纳和演绎是人们认识过程中两个相反相成的方法。归纳法是从个别到一般的认识方法；演绎法则是从一般到个别的认识方法。人的认识活动是二者不断循环、不断深化的过程，数学的产生和发展也不例外。今天的数学，无论是较为简单的初等数学，还是极为高深的现代数学，总的说来，都是用演绎法建立起来的

① 参见恩格斯：《反杜林论》，第140页。

体系，但这只是一个方面，也是一种表面现象。实际上归纳是演绎的出发点。

在人类的认识史上，人们的经验不断地改变着人们的信念。经验是人们实践活动的基本依据。科学家的工作说到底是积累经验、总结经验。要从经验中总结出一般性的结论，就离不开归纳法。数学不仅用归纳法，而且还是应用归纳法的典型学科。常见一些理论性文章，用枚举归纳法仅举出若干实例后就得出“足以”如何如何的结论。其实这种结论只具有相对的意义，并不充分。当然数学也用枚举归纳法。但是数学在用这一方法证明某一命题时，是对该命题的各种可能情况（比如 $a>0$，$a=0$，$a<0$ 等）进行毫无遗漏的考察后才作出结论的，因而有无可比拟的说服力。

数学中许多命题（如涉及无穷的命题）的证明，不可能枚举若干实例就能穷尽一切可能情况，这时枚举归纳法就失灵了，常常要用数学归纳法证明。这个方法要求：第一，$n=1$ 时命题成立；第二，设 $n=k$ 成立能推出 $n=k+1$ 时成立。这样得出的结论对任意的 n 均成立。因为对 1 成立，因而对 $1+1=2$ 成立；对 2 成立，因而对 $2+1=3$ 成立，如此等等。这一方法的特点是用有限的步骤（实际只有两步）证明了对无限多个个别情况的适用性。

在数学发展的历史上，几乎著名的数学家都重视归纳法的运用。欧拉曾说：“今天人们所知道的数的性质，几乎都是由观察而发现的，并且早在用严格论证确认其真实性之前就发现了。”①高斯也多次讲到他的许多发现都是靠归纳法。他认为，证明只是后来补行的手续（当然，这一步对数学来说是必不可少的），也是迟早的事情。彭加勒更重视归纳法，他认为数学推理的创造性

---

① 转引自G.波利亚：《数学与猜想》第1卷，科学出版社1984年版，第 1 页。

主要表现在数学归纳法上，他说：“我们只能用数学归纳法才能前进，只有它才能告诉我们新鲜事物。如果没有……数学归纳法的协助，我们就无力创造科学。”① 数学家重视归纳法是他们经验之谈，也是他们自发的、朴素的唯物主义思想的体现。

作为归纳法和演绎法的综合运用是类比法。类比有比较、类似、相似之意。如果说，数学归纳法是从个别认识向一般认识的过渡，那么类比法则是从一个客体或客体系统化知识向另一个客体或客体系统化知识的过渡。牛顿二项定理就是类比当n是正整数时$(a+b)^n$的展开法得到的；积分公式

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c(n \neq -1)$$

最初也是类比$n=1, 2, 3$等时得出来的，它们的证明则是后来的事情。

不管是归纳法也好，类比法也好，它们所“猜想”的结论只有当用逻辑方法证明了的时候才能作为数学定理予以应用。关于哥德巴赫猜想，尽管今天人们还拿不出一个实例来驳倒它，但在没有证明之前只能是“猜想”，而不是数学定理。

（2）分析法、综合法、抽象法。

归纳法虽是演绎法的出发点，但是仅仅用归纳法并不能从大量的经验材料中概括出它们的共同本质。要为演绎法提供可靠的基础，还必须用分析法。

一般来说，分析法是思维把事物分解为各个部分并加以考察的方法；综合法是思维把事物看作一个有机整体并加以考察的方法。分析和综合相互依存、互为前提。任何综合都以分析为基础；任何分析又都以综合为指导。它们相互包含、交叉，特别是较为复杂的问题更是如此。它们也相互转化并遵循“分析——综

① 彭加勒：《科学与假设》，第117页。

合——再分析——再综合”这一不断循环的认识发展过程。

分析法对数学的产生和发展是极为重要的。恩格斯曾以萨迪·卡诺对热机过程的分析为例，说明了深入地分析一部蒸汽机比简单枚举十万部蒸汽机的表面特征更能揭露热机的内部过程。千百年来，大家都应用数字计算，但是究竟怎么是计算？计算的本质到底是什么？在1936年以前没有人作过分析。英国的图林分析了计算的实质，为电子计算机的产生与发展从理论上给予了证明。

数学中的分析法和综合法，除了具有上述辩证思维的含义以外，还指用演绎法作逻辑推理过程中两个相反的推理过程：综合法是“由因导果”，分析法是“执果索因”。这种实例在数学中俯拾即是。

客观事物都有它的现象和本质。本质往往隐藏在它的现象背后，不易被人感知。在分析事物时，必须善于区分本质与非本质、主要因素与次要因素。要找出本质的、主要的因素，必须用抽象法。抽象一般指在认识上把事物的某种属性从整体中抽取出来。因此，抽象法离不开分析法，抽象是在分析基础上进行的；抽象过程就是常说的去粗取精、去伪存真、由表及里、由此及彼的过程。一切科学的抽象，都能更深刻地反映客观事物。抽取事物的不同的方面并加以研究，就发展出不同的学科。数学是研究量的学科，所以就需要把“质”撇在一旁作为无关紧要的东西，仅仅把事物的量和量的关系抽取出来。由于量与质形影不离，所以抽象法对于数学显得更为重要。数学中一切概念、关系和原理都是抽象的结果，现代数学还是经过多次抽象的结果。没有抽象就没有数学，更不可能有现代数学，高度的抽象性是数学区别于其它科学的重要特征之一。

3.建立数学体系的几个主要方法

一个数学体系的建立是许多数学方法综合运用的结果；而一个数学方法也可用于建立不同的数学体系。上面已经谈过，现代

数学虽是一个体系庞大、分支众多的学科群，但是纯粹数学仍然分成分析学、几何学和代数学三个基本部门。在古典的意义上，这三个部门分别是用极限法、公理法和模型法建立起来的，因此，这三种方法也是建立数学体系的主要方法。

（1）极限法。

极限法是最早用于建立微积分体系的方法。古希腊的穷竭法和中国古代的割圆术是其早期形式。牛顿和莱布尼茨的微积分，因以（实）无穷小为基础而遇到逻辑困难，所以在他们的晚期都不同程度地接受了极限思想。经过整个18世纪的酝酿，在19世纪初期，以柯西的工作为标志用极限法对已有的微积分进行了改造。外尔斯特拉斯用极限理论把古典微积分定型成今天的形式。由于极限法离不开实数理论，所以在19世纪的70年代初期，当狄德金和康托尔等建立了完整的实数理论后，极限法才有了可靠的基础。

极限理论一般包括极限的严格定义、极限的运算以及极限存在判别法等方面的内容。有了这套理论，就可以建立严格的微积分体系。首先，定义函数$y=f(x)$的导数：

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=y'$$

关于导数概念的形成、求法（即微分法）、性质（如中值定理等）以及应用的研究就是微分学的基本内容。微分学就是围绕导数这一概念展开的数学。其次，函数$y=f(x)$在给定区间上的积分被定义为“总和的极限”：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\triangle x_i=\int_a^b f(x)dx$$

关于积分概念的形成、求法（即积分法）、性质（如微积分基本定理等）以及应用的研究就是积分学的基本内容。积分学就是围

绕积分这一概念展开的数学。

分析学是现代数学三个基本部门之一，通常是微积分、级数论、变分法、微分方程、积分方程、函数论以及泛函分析等学科的总称。这些分支实际是古典微积分在不同方向上的发展，极限法在其中起着基本的作用。由于分析数学不仅应用于几何学、代数学，而且还广泛应用于许多自然科学和技术科学，所以极限法也广泛应用于这些学科。

极限法要求，当已知变量x的变化过程，比如，它按数列

$$x_1、x_2、x_3、\cdots、x_n、\cdots \qquad (A)$$

变化时，求出它的极限a。数列（A）是x的变化过程，a是x变化的结果。一方面，数列（A）中任何一个x_n，无论n再大都不是a，体现了过程与结果的对立性。另一方面，随着过程的进行（即n无限地增大），在x_n中含a的因素逐渐增多，经过飞跃又可转化为a，体现了过程与结论的统一性。所以a的求出是过程与结果的对立统一；过程决定了结果，结果又体现了过程。极限法就是从有限过程中求出无限过程以后的结果的数学方法。在数学中，凡是涉及无穷的问题，常常要用极限法。

（2）公理法。

数学中的概念分两类：一类是不加定义而直接使用的概念叫基本概念；另一类是用基本概念直接或间接加一定义的概念叫派生概念。数学中的命题也分两类：一类是不加证明而直接用作逻辑推理的依据的命题叫做公理；另一类是以基本概念和公理为最终依据而推导出的命题叫做定理。数学常从少数基本概念和公理作为基础来建立它的理论体系，这种方法叫做公理法。建立一个数学体系所使用的全体公理称作一个公理系统。

自希尔伯特的《几何基础》（1899）一书问世以来，公理法对现代数学和某些自然科学产生重要的影响。公理化的趋势是现代数学区别于以往数学的重要特征之一。

从不同的公理系统出发，演绎出不同的数学分支。凡公理化了的数学，它的基础也就清楚了。它在公理的基础上将其它所有的概念、命题组织成严格的逻辑体系，并且是“由易而难，若阶级之渐升”①，是“由显入微，从疑得信”②；它条理清楚，简明扼要，使人们便于学习、继承和运用。所以，一门数学如果公理化了，则被认为是成熟的学科。

恩格斯在《反杜林论》中关于公理有一段论述，他说：“数学公理是数学不得不从逻辑那里借来的极其贫乏思想内容的表现。”③意思是说，数学公理的内容是极其贫乏的，不能单纯依靠它来建立数学体系并发展数学。我们知道，《反杜林论》写于19世纪70年代后半期。这时不仅希尔伯特的《几何基础》没有问世，而且帕施的《新几何讲义》也没有问世，因此，现代意义下的公理化趋势不可能出现。不是职业数学家的恩格斯不能未卜先知。因此，恩格斯笔下的“公理”是沿用欧几里得的用法，即公理和公设是分开的，这同现代所说的公理的含义不尽相同。《几何原本》作为两千年前的著作，体现它的几何性质的主要是公设而不是公理。恩格斯所讲的公理的贫乏，原意指，要发展数学，“必须汲取真实的关系”，而不能仅仅依靠“纯粹同义反复”（如“整体大于部分”）和“逻辑可以担保其正确性”④（如关于相等和不相等的公理）的公理。

一般说来，当用公理法建立数学体系的时候，要精确某些概念，要补充一些逻辑环节，但是总的说来，仅限于对已有的材料作出整理。因此，公理法是整理已有的数学材料、建立数学体系

---

① （清）李善兰等译：《代微积拾级·序》。

② （明）徐光启等译：《几何原本·序》。

③ 恩格斯：《反杜林论》，第36—37页。

④ 同上。

的方法，用它不可能取得重大突破，除非改变原来的公理系统。

由于从不同的公理系统出发，可演绎出不同的数学分支，可见，从已有的材料中提炼公理系统是非常重要的。一个公理系统的形成，绝不是数学家的主观臆造，它必须具备一定的条件。按希尔伯特的分析，它必须满足独立性、相容性和完备性三个条件。但是要真正作到这三条并不容易，甚至今天还不能彻底实现。比如，作为公理法的典型著作的《几何基础》，计有6个基本概念和20个公理。这个系统的独立性和相容性问题，并没有真正从逻辑上给予证明。因为：平行公理的独立性仅仅是一个经验的事实，而不是逻辑上的证明；它的相容性问题，我们只能说这个系统今天没有矛盾，但是没有证明以后永远不会产生矛盾。

关于希尔伯特公理系统的相容性问题，这里不妨多说几句。在历史上，人们对欧几里得几何的相容性是相信不疑的，甚至认为它是空间关系的唯一真理。非欧几何产生后，由于它不符合人们的直观，从而引起对非欧几何相容性的怀疑。比如，人们问道，虽然非非欧几何目前在逻辑上是相容的，但能否保证它永远相容？后来，彭加勒在欧氏几何系统中构造出罗氏几何模型。该模型说明，如果以后在罗氏几何中出现矛盾，将其翻译成欧氏几何的相应命题，则也是矛盾的。因此，罗氏几何的相容性问题化归为欧氏几何的相容性问题，即：如果承认欧氏几何的相容性，就必须承认罗氏几何的相容性。本来人们对欧氏几何的相容性没有疑虑，而这样一来，欧氏几何责任重大，它的相容性引起人们的担心。

数学家进一步的研究发现，在罗氏几何学中也可实现欧氏几何学。这样，欧氏几何的相容性问题，又可归结为罗氏几何的相容性问题。就是说，在欧氏几何与罗氏几何中，只要证明其中任何一个是相容的，则另一个的相容性问题也就证明了。

人们的注意力自然地集中于欧氏几何的相容性问题。希尔伯

特根据近代解析几何的思想——数与形的统一，在实数系统中可构造欧氏几何模型（如共点线、共线点等）。于是欧氏几何的相容性又要依靠实数系统的相容性来保证。实数系统的相容性又如何呢？狄德金把实数系统的相容性问题又化归自然数系统的相容性问题。接着弗雷格又把自然数系统的相容性问题化归为集合论的相容性问题。但是，集合论的相容性问题至今没有真正解决。因此，希尔伯特公理系统的相容性问题严格的说今天并没有解决。

尽管如此，并不影响这一公理系统的典型性，丝毫不降低公理法作为方法论的强大威力。人们对客观真理的认识，本来是一个永无止境的过程，对数学公理法的认识也是如此。数学家无论在过去、现在或将来，在任何一个具体的历史时期，都不可能穷尽一切真理。否则无异于否定过去和现在的一切数学。正因为数学家具有这种自发的、朴素的唯物辩证思想，才肯定《几何基础》方法论的重大意义。

（3）模型法。

模型法是“数学模型法”的简称，也是抽象法的发展。数学模型的含义很广。粗略地说，凡是用数学符号和图形所表示的数量关系和空间形式都是数学模型；凡数学中各种重要的概念（如实数、向量、集合、群和各类空间等），各种公式和方程（如二项公式、微分公式、代数方程、微分方程和积分方程等）以及由它们构成的数学系统都是数学模型。数学家由实际问题的启发，构造数学模型，并对其开展研究、发展数学以至建立新的数学分支，是较高层次的构造数学模型的工作。今天许多数学分支，如代数方程论、微分方程、抽象代数等，实际上是对不同的数学模型研究的结果。

一个公理系统也可看成是一个数学模型。用极限法时，也必须先建立数学模型。所以模型法是建立数学体系最常用的数学方

法。在这个意义上，有的数学家才把数学定义为研究量化的数学模型的学科。

在现代数学中，数学模型大致分为如下三类：确定性模型、随机性模型和模糊性模型。数学模型同其所对应的实际问题之间的关系是反映和被反映的关系。当然，反映不是照相，而是经过归纳、分析、类比和抽象后，扬弃其中次要的、非本质的因素，仅仅保留其同问题有本质联系的因素。比如，有时可将曲线抽象为直线以及将诺大的一块平面或巨大的天体抽象成一个点等。所以数学模型不同于大型建筑物的“沙盘”和生物学中的“标本”。下面举一个例。

哥尼斯堡七桥问题。这是18世纪的问题，说的是，东普鲁士的哥尼斯堡区有一条河，该河由两条支流混合而成，河的中心有一个岛屿，岛上有一座哥尼斯堡大学。从岛屿到河流两岸的陆地和半岛之间共有七座各具特色的大桥（图4.3）。大学生们散步时时常经过七座大桥。他们问道：能否在一次散步中，既不重复、又不漏过任何一个桥呢？这就是“哥尼斯堡七桥问题”。

根据欧拉的思想：河流两岸的陆地、岛屿和半岛是大桥的连结点，而同其面积大小无关，所以将其抽象成四个“点”；七座桥同其长度、宽度、建筑特色和使用材料无关，所以抽象成七条线，于是得图4.4。图4.4是实际图形图4.3的数学模型。于是“七

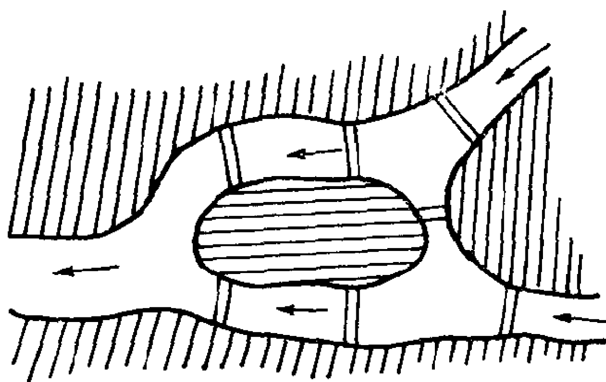


图 4.3

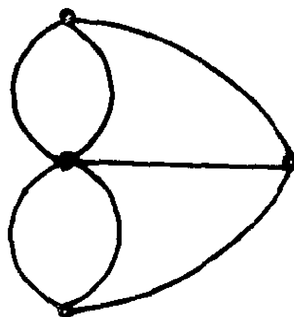
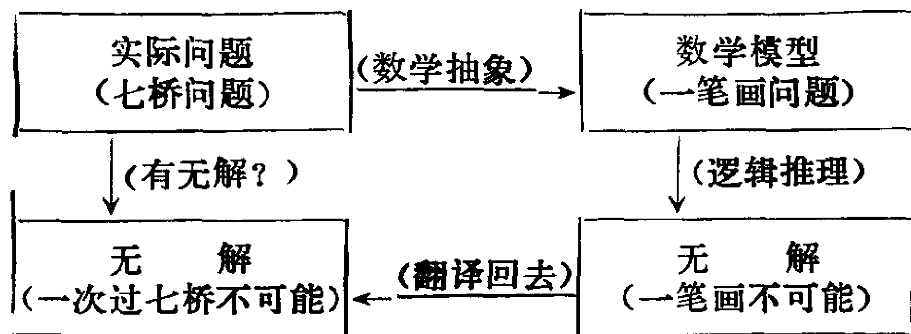


图 4.4

桥”问题就被抽象为拓扑学中的“一笔画”问题。

欧拉研究了“一笔画”的特征。这些特征是：（i）它有起点和终点，起点和终点可以重合，也可以不重合；（ii）除起点和终点外，中间还可能出现若干连结点，在这些点处的线一进一出，若通过的线数为偶数，称为“偶点”；（iii）起点和终点若重合必为偶点，若不重合，则经过的线数必为奇数，所以称为“奇点”。据此，欧拉断定：任何一笔画，要么没有奇点，要么只有两个奇点。在七桥问题中，四个点都是奇点，故不属一笔画范围。因此断定，在一次散步中不重复地经过七座桥是不可能的。上述思想方法用图表示如下：



这是用模型法解决实际问题的一例。在数学教科书中，当学完一个原理或公式后，用其解所谓的“应用”问题，比如：用勾股定理作测量，用导数求极值以及用积分求面积、体积等，都是数学模型的应用。

4.数学处理问题常用的两个方法

数学方法形形色色。首先，不同的数学分支都有自己特有的方法。在这个意义上说，不同的数学方法是区分不同的数学分支的标志。如分析数学中的微分法和积分法，代数学中方程的根式解法，计算数学中的迭代法和有限元法等。其次，数学方法也有不同的层次。如初等数学中的四则法，高等数学中的坐标法以及现代数学中的各种算子等。较高层次的方法包括了对较低层次方法的综合应用。在这个意义上说，四则法是最基本的方法，也是

用得最多的方法；数学的发展也是数学方法的发展。作为数学哲学的方法论，则着重讨论数学方法的共性和认识论问题。映射法和数学实验法是反映现代数学方法共性的两种最常用的方法。

（1）映射法。

如前所述，许多实际问题，只要构造出它的数学模型，再对其作逻辑推理和计算就可得出答案。但是也有许多问题，尽管有了数学模型，还不能从模型中直接得出结果，而必须经过迂回的道路，用哲学的术语来说对它进行一次否定，有时必须经过多次否定才能变未知为已知。映射法就是通过矛盾的转化求得问题解决的方法。

映射法包括所研究问题中的关系和解决问题时所采取的两个步骤：映射和反演，所以它的全名应是“关系映射反演法”。由于映射和反演是两个恰好相反的过程，因此，这个方法是否定之否定的一种典型形式。如果我们把由现实原型到数学模型的建立也看作是一种映射，再把分析模型所得出的结果对应到现实原型看作反演，则上述模型法也是映射法的一种形式。

映射法不仅是数学解决自身问题时一种常用的方法，也是一般科技人员常用的方法。这是因为，用这种方法解决问题有化繁为简、化难为易、化不可能为可能的作用。比如，用对数（映射）方法可将原问题中的乘、除、乘幂和开方，分别化为较低层次的加、减、乘、除运算。在解析几何中，许多复杂的几何关系经过映射（坐标法）变为代数中的数量关系，再对数量关系作研究就得到问题的解答。因此，解析几何处理问题大都用映射法。下面举一个例。

帕布斯定理。设 L_1、L_2 为同一平面上的任意两条直线（图4.5），在L_1与L_2上分别任取三点A_1、A_2、A_3和B_1、B_2、B_3；且A_1B_2与A_2B_1的交点为C_3，A_1B_3与A_3B_1的交点为C_2，A_2B_3与A_3B_2的交点为C_1。求证C_1、C_2、C_3三点共线。

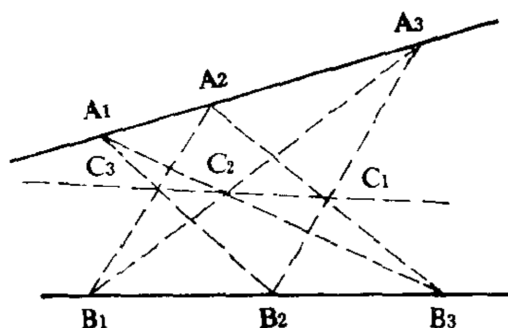


图 4.5

这一问题如果用几何学中的综合法证明是相当困难的，但用解析几何的方法则容易得多。为了清楚，分为如下几个步骤：

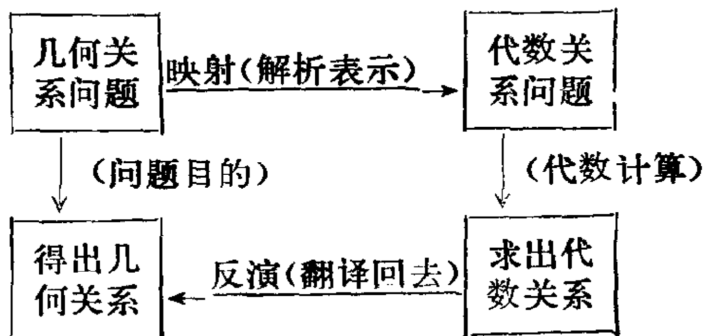
(i) 取两个二元一次方程式分别表示直线L_1与L_2。

(ii) 任取三组数使其满足L_1的方程，三组数分别表示A_1、A_2、A_3点；同理，在L_2上也得任意三点B_1、B_2、B_3。

(iii) 求出经过A_1、B_2点和A_2、B_1点的直线方程，二者交于C_3点；同理，再求出C_1、C_2点。

(iv) 应用行列式容易证明三点C_1、C_2、C_3共线。

将上述思想方法用图表示如下：



数学家利用映射反演法，曾经解决了历史上许多难题和“不可能”问题。例如：证明$\sqrt{2}$的无理性，证明实数的不可数性以及“几何三大难题”的不可能性等等。

(2) 数学实验法。

数学实验是相对科学实验而言的一种方法。科学实验通常指在实验室或其它特定的环境中，凭借科学仪器和设备等物质手段

模拟或控制某些自然现象，使其在纯粹、典型的条件下进行某种有目的的研究方法。数学实验则不同，目前有如下两种含义。

一种是**思想实验**。这是指实验者不必要或不可能进行具体操作，而是利用思维的能动作用，并在假定的手段和步骤的条件下进行逻辑论证的一种方法，例如，概率论中的随机试验一般都是在想象中进行的。

另一种是用电子计算机进行的**计算实验**。自电子计算机产生、发展并被广泛应用以来，促进了数学中一个重要分支——计算数学的迅速发展。计算数学一方面根植于几乎所有数学领域，另一方面它的方法又反过来在许多数学领域中探索运用。在此以前，要求解一个成千上万个参数的数学问题实际是不可能的。而现在由于电子计算机和计算数学的产生和发展，使得分析、处理非常复杂的数学模型已成为可能；它把某些数学结论由定性、存在性发展到量性、结构性，显示出计算实验方法的强大威力。

用计算机解决具体的科学问题，一般的步骤是：先由实际问题建立数学模型，再根据数学模型设计程序，最后上机计算得出结果。由于修正数学模型的简易性（相对而言），人们可以改变数学模型的某些参数，将计算的结果进行比较，从中得出最优方案。另外，数值计算的一个重要特点是迭代，通过反复迭代可以逼近实际问题的真解，体现了由相对到绝对的认识过程。

数学模型是计算实验的基础。因此，计算实验的认识论问题实际也是数学模型的认识论问题。前面曾说，数学模型同其所反映的实际问题之间是反映和被反映的关系，因此，计算实验也是映射法的一种运用。

计算数学主要包括两个方面的内容：离散方程的数值解和连续统的离散化。计算实验的研究不像理论数学那样研究数学本身的理论，而是围绕同求数值解有关的理论（如收敛性、稳定性和误差分析等）进行研究。计算实验同科学实验倒有某些相似之

处：物理现象被该现象的数学模型所代替；实验设备由给定程序的计算所代替。在现代计算机的研制中，“人机对话”是一个难点。一旦实现人机对话，计算实验将提高到一个新的水平，计算实验的实际意义和理论意义更大。

附录一 国际数学奖和现代数学强国

1.国际数学组织

资本主义的发展，打破了封建时代“鸡犬之声相闻，老死不相往来”的局面。数学单凭数学家私人之间的通信或几份杂志互通信息已满足不了需要。数学家不仅需要知道同行们已经作了哪些工作，还要知道同行们正在作哪些工作。因此定期举行国际性的数学家集会，以便加强了解、交流信息，已成数学界的共识。在这种背景下，1897年在瑞士的苏黎世召开了第一届“国际数学家大会（简称ICM）”。会议决定1900年在巴黎召开第二届国际数学家大会。在1900年的会议上，希尔伯特发表了著名的演说，提出具有重要历史意义的23个问题。此后，除两次大战期间中断外，每隔四年召开一次。会议的规模也由最初的200人左右增加到最近几年的3000人左右。各次大会的时间和地点见下表。

时间（年）	地点	时间（年）	地点
1897	苏黎世（瑞士）	1954	阿姆斯特丹（荷兰）
1900	巴黎（法国）	1958	爱丁堡（英国）
1904	海德堡（德国）	1962	斯德哥尔摩（瑞典）
1908	罗马（意大利）	1966	莫斯科（苏联）
1912	剑桥（英国）	1970	尼斯（法国）
1920	斯特拉斯堡（法国）	1974	温哥华（加拿大）
1924	多伦多（加拿大）	1978	赫尔辛基（芬兰）
1928	波伦尼亚（意大利）	1982	华沙（波兰）
1932	苏黎世（瑞士）	1986	伯克利（美国）
1936	奥斯陆（挪威）	1990	京都（日本）
1950	波士顿（美国）		

（引自《中国大百科全书·数学卷》，第282页）

“国际数学联合会（简称IMU）”是非政府性的国际数学学术组织（也参加了联合国教科文组织的“科学联盟国际会议”），其宗旨是：促进国际间的数学研究合作，支持和资助四年一度的国际数学家大会和有关的学术会议，鼓励和支持有助于数学（包括纯粹数学、应用数学和数学教育）发展的国际性数学活动。1950年8月在纽约由22个国家的数学团体联合发起，并于1952年在意大利举行IMU成立大会。它的领导机构是由选举产生的执委会，执委设主席1人，副主席2人，秘书长1人，委员5人（上届主席为执委会的当然委员）。执委会任期四年，于国际数学家大会召开期间改选。IMU截止1987年已有53个国家和地区成员。

国际数学家大会的议程由国际数学联合会的执委会决定：主要是邀请一批在各学科有重大成就的数学家分别在大会上作1小时的学术报告和各学科分组会上作45分钟的学术报告。凡出席大会的数学家都可申请在分组会上作10分钟的学术报告。大会一般分20个左右的学科组。

在国际数学家大会的开幕式上，由联合会的领导人宣布该届菲尔茨奖获得者名单，颁发金质奖章和奖金，并由另一个权威数学家介绍获奖者的研究工作。从1983年起，同时颁发奖励在信息科学方面作出重要成就的奈望林纳奖。

2.国际数学奖

现代国际数学奖主要是菲尔茨奖和沃尔夫奖。

1924年国际数学家大会在加拿大的多伦多举行。加拿大数学家菲尔茨作为东道主用他的卓越才能以最优的方式组织了这次大会，为大会节余了一笔可观的经费。菲尔茨提议用这笔结余经费设立一项数学奖。菲尔茨可能由于组织这次会议的劳累，大会后身体一直不适，并于1932年的大会前一个月去世。他去世前立下遗嘱，将自己的一笔遗产也加到1924年大会的结余中，并提议不要用任何个人、国家或机构的名称来命名，应该是数学优秀发现国际奖，强调这项奖的国际性。但是1932年的大会为了纪念他为此奖作出的功绩，决定以他的名字命名这项数学奖。第一次评奖是在1936年。

菲尔茨为什么极力主张设立一项数学国际奖呢？这是因为在世界上享有崇高声誉的诺贝尔奖中只有物理、化学、生理和医学、文学、和平事业五项（1968年增设经济学奖，1991年初又设绿色诺贝尔奖），而唯独没有数学奖。诺贝尔不设数学奖的原因说法不一。国际上流行的说法是，诺贝

尔与和他同时代的数学家、彼得堡科学院院士米塔-列夫勒（二人都是瑞典人）曾有矛盾，在他立遗嘱期间，意识到如果设立数学奖，这项奖第一次就会被他不喜欢的人拿去。不设数学奖可能是诺贝尔对米塔-列夫勒和他所从事的数学职业的一种报复。另外，1920年国际数学家大会在法国的斯特拉斯堡举行，而斯特拉斯堡在第一次大战前是德国领土，因此德国拒绝参加这次大会。这使菲尔茨认识到坚持“国家主义”为数学带来的危害。所以他努力设立一项国际奖，提倡“国际主义”，促进数学事业的发展。

菲尔茨奖的特点是奖励年轻人。菲尔茨曾提议，主要奖励已取得的成果，但也含有鼓励获奖者继续努力的殷切期望，所以获奖者都应在40岁以下。开始是不成文的，后来干脆作了明文规定。

起初，菲尔茨奖的社会影响不能和诺贝尔奖相比。但是最近30多年来，它的荣誉和影响在不断地提高，被人们认为是数学中的诺贝尔奖。历届菲尔茨奖得主的情况列表如下：

获奖时间(年)	获奖者	国籍	主要工作领域
1936	L.V.阿尔福斯	芬兰—美国	复分析
	J.道格拉斯	美国	极小曲面
1950	L.施瓦尔茨	法国	广义函数，泛函分析，偏微分方程，概率论
	A.塞尔贝格	挪威—美国	解析函数，抽象调和分析，李群的离散子群
1954	小平邦彦	日本	分析学，代数几何，复解析几何
	J.P.赛尔	法国	代数拓扑，代数几何，数论，多复变函数
1958	K.F.罗特	德国—英国	解析函数
	R.托姆	法国	代数拓扑，微分拓扑，奇点理论
1962	L.赫尔曼德尔	瑞典	偏微分方程一般理论
	J.W.米尔诺	美国	代数拓扑，微分拓扑
1966	M.F.阿蒂亚	英国	代数拓扑，代数几何
	P.J.科恩	美国	公理集合论，抽象调和分析
	A.格罗特迪克	法国	代数几何，泛函分析，同调代数

续前表

获奖时间(年)	获奖者	国籍	主要工作领域
	S.斯梅尔	美国	微分几何，微分动力系统
1970	A.贝克	英国	解析函数
	广中平祐	日本	代数几何，奇点理论
	C.П.诺维科夫	苏联	代数拓扑，微分拓扑，代数K理论，动力系统
	J.G.汤普森	美国	有限群论
1974	E.邦别里	意大利	解析数论，偏微分方程，代数几何，复分析，有限群论
	D.B.孟福德	美国	代数几何
1978	P.德利涅	比利时	代数几何，代数数论，调和分析，多复变函数
	C.费弗曼	美国	调和分析，多复变函数
	P.A.马尔库利斯	苏联	李群的离散子群
	D.G.奎伦	美国	代数拓扑，代数K理论，同调代数
1982	A.孔涅	法国	算子代数
	W.P.瑟斯顿	美国	几何拓扑，叶状结构
	丘成桐	中国(香港)	微分几何，偏微分方程，相对论
1986	M.弗里德曼	美国	拓扑学
	S.唐纳森	英国	拓扑学
	G.法尔廷斯	西德	莫德尔猜想
1990	V.德里菲尔	苏联	同物理有关的量子场理论
	J.沃赫	美国	冯·诺伊曼代数
	森重文	日本	代数几何
	W.艾德瓦	美国	拓扑量子场理论

(引自《中国大百科全书·数学卷》，第205—206页)

在上述获奖者中，年龄最大的39岁，最小的28岁，平均年龄约为34岁。因为年龄小，所以他们的成就不一定是当时的最高水平；正因为年龄小，说明他们在以后有可能取得更大的成就。在极大的程度上，他们是当时

数学发展的载体，是国际数学事业的接班人。他们的工作领域从一个侧面反映了当时数学发展的趋势。事实证明，从1936年评奖以来，凡获奖者都不是昙花一现的人物。著名数学家H.外尔在1954年的ICM上赞扬过当时的获奖者小平邦彦和赛尔，他说："像我这样年纪的人，要跟上年轻一代在数学方法、问题、成果方面的进展是困难的，……，数学界为你们二位所做的工作而感到骄傲。这表明数学这株扭曲的老树依然充满活力与生机。你们怎样开始的，就怎样继续下去吧！"

在获奖的名单中有一位中国人丘成桐。他1949年出生于我国广东汕头，自幼受教育于香港。1966年入香港中文大学数学系，1969年提前毕业，被陈省身破格录取为研究生而赴美，并在陈的指导下研究微分几何。1971年即22岁时获博士学位。1977年即28岁时升为教授，在几所大学任教。1979年被评为加州最优秀科学家，1981年获得美国数学会颁发的维布伦奖，1982年获国际菲尔茨奖，1983年以后还获各种奖多次。现任圣地亚哥加州大学教授，也是普林斯顿高等研究所终身教授。

沃尔夫曾在德国研究化学，并取得化学博士学位。在第一次世界大战期间移居古巴。他用了将近20年的时间研究出一种从废渣中回收铁的方法，因而致富。他支持古巴1959年的革命。1961年被任命为古巴驻以色列大使，直到1973年古巴同以色列的断交为止。从此他居住在以色列。1976年1月1日，沃尔夫及其家族捐献1000万美元成立沃尔夫基金会，设有数学、物理、化学、医学及农学五个奖，1981年又增设艺术奖。每年评奖一次，每个领域奖金10万美元（可由几个人联合获得）。

沃尔夫基金会主席由以色列官员担任，评奖委员则由世界著名科学家组成，获奖者应是世界上对某个领域作出卓越贡献的科学家。它与菲尔茨奖不同的是，没有年龄的限制，重视科学家一生的成就。由于获奖者的崇高声誉而提高了该奖的声誉。更由于诺贝尔奖中没有数学奖，因此，沃尔夫数学奖也为国际数学界重视。

沃尔夫奖自1978年开始，每年数学奖两名。仅将前7年的14名数学奖获得者的情况列表如下（见下页）。

这14位获奖者都是本世纪特别是近半个世纪以来全世界最负盛名的数学家。如果说菲尔茨奖得主的工作体现了半个世纪以来数学发展的主流，则沃尔夫奖获得者是本世纪以来数学成就的主要代表。

时间（年）	获奖者	国籍	获奖工作
1978	И.М.盖尔芳德	苏联	泛函分析，群表示等
	C.L.西格尔	德国	数论，多复变函数，天体力学
1979	J.勒雷	法国	微分方程中的拓扑学方法
	A.韦伊	法国	数论中的代数几何方法
1980	H.嘉当	法国	代数拓扑，同调代数，复变函数等
	A.H.柯尔莫哥洛夫	苏联	调和分析，概率论，遍历理论，动力系统
1981	L.V.阿尔福斯	芬兰—美国	复变函数论
	O.札里斯基	俄国—美国	代数几何
1982	H.惠特尼	美国	代数拓扑，微分几何，微分拓扑
	M.Г.克列因	苏联	泛函分析及其应用
1983/84	陈省身	中国—美国	整体微分几何
	P.爱尔特希	匈牙利	数论，组合论，概率论
1984/85	小平邦产	日本	复流形，代数簇
	H.卢伊	波兰—美国	偏微分方程

（引自《中国大百科全书·数学卷》，第734—735页）

3.现代几个数学强国

在34名菲尔茨奖的获得者中，他们的国籍分布是：美国14人，法国5人，英国4人，原苏联和日本各3人，瑞典、意大利、比利时、德国和中国各1人。但从获奖前后工作的国籍来看，美国的比重还要增加，其中约一半人的成绩是在美国作出的。

在1985年以前的14名沃尔夫数学奖的获得者中，他们的国籍分布是：美国5人，原苏联3人，法国3人，日本、德国和匈牙利各1人。

“两奖”名额的分布大致反映这些国家的数学水平和实力。实际上美、苏、法、英、日、德六国不仅是本世纪世界数学强国，而且也是当今世界上最发达的工业国家。

下边仅简述德、法、美三国数学发展的某些原因。

德国的资产阶级革命虽然晚于英、法，但其现代科学却后来居上。自

18世纪末期以来，在科学文化领域中都曾出现过许多世界伟人，如康德、歌德、贝多芬、黑格尔、马克思、恩格斯、爱因斯坦等。数学领域更不例外，有高斯、黎曼、康托尔、F.克莱因、希尔伯特等名家。德国数学一直有雄厚的基础。

德国的数学成就主要同哥廷根学派密不可分。18世纪以前，哥廷根是一个并不引人注目的小城镇，1734年在此设立哥廷根大学方为人知。由于该校出了一个数学家之王高斯才著名于世。19世纪中期，在这所大学执教的还有狄利克雷、黎曼等数学大师。他们的工作为哥廷根学派奠定了基础。1886年，F.克莱因来该校任教，使它走上新的时期。F.克莱因是拓扑学开创人之一，对非欧几何有深刻研究，并以“埃尔朗根纲领”的演说著称；他是一位卓越的教育家，重视数学教育，重视人才，很会讲课；他也是一位优秀的学术领导人，善于发现、团结、使用人才。哥廷根没有数学系，数学作为哲学院的一部分，且只设两名教授。F.克莱因先后把希尔伯特和闵可夫斯基等请到哥廷根，开创了哥廷根的新局面。由于数学人才出众，校方不得不把教授名额增至4位。经过短短二十来年的努力，出现了一批成果。例如：希尔伯特出版了《几何基础》（1899）、发表了23个问题的演说（1900）、提出无穷维空间理论（即希尔伯特空间，1902）；策梅罗提出公理集合论（1908）；闵可夫斯的《空间和时间》的讲演为相对论引入数学时空观（1908）等等。与此同时，也培养了一批优秀的数学人才，柯朗就是其中之一位。

1914年第一次世界大战暴发，凡符合年龄的人都要服兵役。适龄的科学工作者也不例外。柯朗也服过兵役，受过伤，还得过“勋章”。1918年战争结束，柯朗回到哥廷根，担任副教授。1925年克莱因去世，当时37岁的柯朗接替克莱因的职位（相当于今天的系主任）。柯朗除继承克莱因的办系方针外，还同一个出版商合作，出版他们的学术著作；1929年，又成立数学研究所。从此，不少数学名家，如H.外尔、E.诺特、斯密特、阿廷、托普利茨、西格尔等相继到哥廷根工作，使哥廷根学派达到极盛时期，居于世界领先地位。

1933年希特勒上台，实行法西斯教育，政府明文规定学习的重点是体育和德育而不是智育。他们说：“国家必须把它的教育机器的全部力量用来培养绝对健康的身体，而不是让它的儿童充满知识。……科学训练要远

远地放在后面”；一个好的纳粹党员应该“一听到人提到元首的名字，眼睛就会发亮”；“我们大学训练的目的并不是客观的科学，而是军人的英雄的科学，是富于战斗性的科学”，如此等等。与此同时，希特勒法西斯狂热地鼓吹“德意志科学”。一方面美化和夸大“雅利安人”的科学成就，并把是否为雅利安血统作为评判科学家的标准；另一方面对非雅利安人的科学家，特别是犹太族的科学家打击迫害，比如规定犹太人不许入大学，对于已经在国家机关任职的犹太人要清除，其中包括在大学或研究机构任职的犹太科学家。他们说：“把犹太人精神从科学中肃清是我们最紧急的任务。”①

上有所好，下必甚焉。在物理学中，有人在刊物上指名批判爱因斯坦的相对论，说它是“教条主义精神产物的明显例子”；批判薛定谔的波动-机械学说，说它是“物理-数学奇技的惊人表演”。在数学中，柏林大学教授比勃巴赫笃信希特勒的“国家主义”，高喊“德意志数学”，他发表演说，把犹太血统数学家的成就，不是说“搞智力游戏”，就是说是“抄来的”。于是，爱因斯坦的普鲁士公民身份、科学院院士和物理研究所所长职务被取消，19位诺贝尔奖获得者被解职，且限期离境。哥廷根的主要成员如E.诺特、柯朗、H.外尔、阿廷等也被限期离境。一个闻名世界的数学中心，一下子一蹶不振。1943年希尔伯特去世，哥廷根学派彻底衰弱。

第二次世界大战结束后，德国数学因有基础，所以很快地赶了上来，虽然失去了当初一度执牛耳的地位，今天虽不能同美国相比，但是仍不失为世界数学强国之一。

法国从笛卡尔、柯西到彭加勒，数学一直处于世界的前列。彭加勒在数学的几个主要部门都有重大贡献，是屹立于19、20世纪之交的能雄视数学全局的极少数大数学家之一。在这个时期，以彭加勒为代表的巴黎学派比之当时的哥廷根学派还有明显的优势。但是第一次世界大战却给法国数学带来了严重的灾难。

在第一次大战中，虽然德国是战败国，法国是战胜国，但是法国的数学损失却比德国严重。这是因为，在战争年代，德国把征集到的科技人员

---

① 转引自贝尔纳：《科学的社会功能》，商务印书馆1982年版，第310、311、312、309页。

（包括数学工作者）放到增强军队战斗力的技术岗位（如柯朗在通讯部门服役），而法国则把这些人和普通士兵一样赶上前线伤亡惨重，比如，战争结束后，在法国的著名学府——巴黎高等师范学校的适龄师生多数阵亡，数学系几乎找不到二、三十岁的一代人。

不过，法国的教育部门还算清醒，着手弥补。1924年，他们招收一批十八、九岁的青年入学，其中有狄多涅、A.韦伊、H.嘉当等人。而给他们上课的老师，绝大部分都是在国际上享有声誉的函数论专家，其中有波雷尔、毕卡、勒贝格、当儒瓦、蒙代尔、E.嘉当等。这批学生受到函数论的良好教育。但是，他们并不满足"函数论王国"的现状。他们发现德国诺特的抽象代数、波兰巴拿赫和匈牙利里斯的泛函分析、奥地利哥德尔的数理逻辑以及德拉姆的流形理论等都别开生面，并有力作。他们决心在法国搞一场"数学革命"，冲击函数论的局限；并从头作起，把数学重新整理一遍；在没有取得成就之前，秘密地进行，用笔名发表著作。这就是本世纪著名的布尔巴基学派的开端。该学派的特点是：成员都是年轻人。他们目光敏锐，干劲充足；它的成员分散在全国各单位，定期开会讨论；成员也不十分固定，有进有出，每一时期大约十来个人：除了前面已提到的三人外，以后相继参加者还有格罗特迪克、施瓦尔茨、塞尔（这三人都是菲尔茨奖获得者）、谢瓦莱以及唯一的外籍人艾伦伯格等。他们的数学著作是《数学原本》，其第一卷1939年出版，1973年已出了36卷，仍未宣布出完。

布尔巴基学派奉行结构主义观点，他们认为，全部数学基于三种母结构：代数结构、序结构和拓扑结构。36卷《数学原本》就是这一思想的体现。对数学的发展他们有一个通俗的比方："数学好比一座大城市。城市中心有些巨大的建筑物，就好比是一个个已经建成的数学理论体系。城市的郊区正在不断地并且多少有点杂乱无章地向外伸展，它们就好象是一些尚未发育成型的正在生长着的数学新分支。与此同时，市中心又在时时重建，每次都是根据构思更加清晰的计划和更加合理的布局，在拆毁掉旧的迷宫似的断街小巷的同时，将修筑起新的更直、更宽、更加方便的林荫大道通向四方……。"①他们的目标，就是按结构主义的观点重新构建数学体

① 转引自徐利治：《数学方法论选讲》，华中工学院出版社1983年版，第60页。

系。他们重视数学结构、对数学的宏观了解和数学分类，而不崇尚数学技巧。像数论中某些高难度的数学证明，函数论中的精密估计，概率论中的详细计算等，在布尔巴基学派的体系中找不到适当的位置，就连法国最拿手的复变函数论也处于不显眼的位置。

布尔巴基学派的思想影响很大。它不仅真正改变了法国数学面貌，而且几乎成为本世纪最有影响的数学思想，甚至在60年代前后，成为一些国家编写中学教科书的指导思想。最近十来年，结构主义思想的热潮已经过去，该学派也有衰弱的迹象。

布尔巴基学派不墨守成规、主动赶超数学先进水平、敢于创新的实干精神是发展科学所必需的。

美国自1776年独立至今不过两百多年的历史，但今天，它不仅是世界经济和军事大国，而且也是当前世界上无与伦比的科学大国，是当今世界数学主要强国。

在美国短暂的历史上也出现了一些名载数学史册的数学家。例如19世纪时的皮尔斯父子和吉布斯等都有一些成就。进入20世纪，有伯克霍夫、道格拉斯和莫尔斯等。伯克霍夫对微分方程很有研究，曾任美国数学会主席多年。道格拉斯是菲尔茨奖的获得者。不过，在第二次大战以前，美国数学落后于欧洲大陆。因此，他们每年都要派一批留学生到巴黎和哥廷根学习。据统计，1862～1934年，美国共有114个数学博士，而其中来自德国的占1/2，仅来自哥廷根的就有34人，约占博士总数的30%。①

美国数学从本世纪30年代之前的平平状况，发展到今天在世界执牛耳的地位，重要原因之一是，它同纳粹德国相反，对科学家实行了比较开明的政策。尽管美国一直存在种族歧视问题，至今并没有彻底解决，但是长期以来，对外国人才的引进和使用，则不分种族、国家和地区，采取罗致的政策。

30年代，曾经有2000多名欧洲著名科学家为逃避德国纳粹分子的迫害而背井离乡，美国则为他们提供安全保障和继续从事研究的条件，吸引其中多数人移居美国，其中诺贝尔奖获得者、物理学家有爱因斯坦、费兰克、贝特和费米等；数学家有E.诺特、柯朗和H.外尔等。1945年，德国

---

① 参见张奠宙、赵斌：《20世纪数学史话》，知识出版社1984年版，第40页。

法西斯投降，美国又特别重视罗致科技人才，德国120多名火箭专家被接到美国，其中有冯·布劳恩等。第二次世界大战后，美国为争夺科技人才，曾于1952年和1965年两次修改移民法，优先批准各种科技人才入境。据美国司法部门统计，在1949～1973年，移居美国的科学家和工程师达16万人。根据苏联1977年出版的《美国科学技术潜力》一书的估计，在1952～1975年，美国引入各种专家、学者共22万。半个世纪以来，美国包括第一颗原子弹的研制成功和“阿波罗”载人登月计划的实现等许多科技的重大突破，都同移居美国的外国科学家的工作有密切关系。例如，1969年，当阿波罗上的宇航员漫步月球时，美国宇航局地面指挥中心的负责人也说：“这是冯·布劳恩的足迹。”①美国数学的发展同这些“外来户”的工作密不可分，柯朗和冯·诺伊曼就是其中的两位。

柯朗来到美国后成绩卓著。战前的纽约大学并不在美国著名大学之列，但以后成为美国名列前茅的学府，其中数学方面的成绩主要来自柯朗的努力。1942年，美国成立应用数学小组（共5人），把全国在数学方面的主要学术领导人组织起来，为反法西斯战争服务，供需要数学的军事部门咨询。在挑选这个小组的成员时，尽管他们考虑到了柯朗在第一次大战中为德皇效力、得过“奖章”的历史，但仍然把柯朗也选了进去。柯朗在纽约大学也成立了一个应用数学小组，成就不少。该小组战后受到海军方面的支持，并改成“数学和力学研究所”。柯朗去世后，为了纪念他的业绩，这个研究所改名为“柯朗应用数学研究所”。

冯·诺伊曼是犹太血统的匈牙利人，自幼才智过人。他在哥廷根大学作过希尔伯特的助手，在柏林大学和汉堡大学任过教。1930年，在纳粹德国驱赶犹太人的浪潮中，他应聘到普林斯顿大学作客座教授，第二年转为终身教授，1933年成为普林斯顿高等研究所终身教授。第二次世界大战爆发后，他参与了反法西斯战争中许多有关的科学计划；从1943年起，他是制造原子弹的顾问；战后是美国原子能委员会成员，是洲际弹道导弹委员会主席。他曾给美国政府出主意对苏联发动一次突然袭击。由于他的成就和对美国的忠诚，曾于1947年、1956年分别获得美国总统颁发的美国海军

① 参见李长久：《引进人才在美国科技发展中的作用》，载《环球》杂志1985年第7期，第8－9页。

服务勋章和自由勋章。

他的学术生涯大致分为两个时期。1940年以前主要从事纯粹数学的研究，他的足迹除数论和代数拓扑外，遍及数学各个领域，在集合论、泛函分析、测度论和连续几何方面都有开创性的工作。他也是一位通晓纯粹数学的物理学家，他对量子力学作了公理化处理，使这一物理领域纳入严格的数学体系。1940年以后，他转向应用数学，这同第二次大战年代的国际形势密切相关。他创立了对策论，参与电子计算机的研制，也是现代数值分析——计算数学缔造者之一。因此这时期他又是掌握纯粹数学的应用数学家。有人说，“如果说他的纯粹数学成就属于国际数学界，那么他在力学、经济学、数值分析和电子计算机方面的工作则属于全人类。”①由于他才智过人、思维敏捷、积极勤奋、大胆创新，并能随时代的发展而修正自己的研究方向，因此，他的学术生涯，不仅是20年代末～50年代末数学发展的缩影，而且也是这30年内科学发展的概要。

冯·诺伊曼的主要著作被收集在《冯·诺伊曼全集》（共6卷，1961）之中，其中纯粹数学60篇，物理学20篇，应用数学60篇，其它10篇，共计150篇。

---

① 参见《中国大百科全书·数学卷》，第218页。

附录二　中国现代数学简况
(1840年以来)

中国是世界文明古国之一。中国古典数学是中国古代科学文化的重要组成部分。我国古代既出现了一批世界古典数学名著，又涌现了一批著名数学家如刘徽、秦九韶等。在14世纪以前，中国数学以其丰富的内容和独特的风格著称于世界。但是从15世纪开始，西方数学开始大踏步地前进，而我国数学不仅没有在原有的基础上发展，反而出现倒退。在西方，17世纪中期已经产生了解析几何和微积分，但是我国19世纪中期才引了进来。在20世纪即将来临之际，一般认为我国数学同世界数学水平之差距约两个世纪。我们既不能因后来的落后而否定过去的先进，也不能因过去之先进而掩盖现在的落后。造成落后的根本原因是长期的封建统治和统治者实行错误或不力的科学政策。中华民族并不甘居落后，炎黄子孙并不是无所作为的低能儿。自鸦片战争后的150年以来，我国数学家奋斗的足迹表明，他们并没有因落后而气馁，他们在极端困难的条件下，顽强地追赶世界数学发展的主流，使差距逐步缩短。直到今天，中国数学总的来说仍然落后，然而它的潜力是巨大的，中国数学进入世界数学先进行列的日子不会很远了。

1.中国现代数学的酝酿（1840～1919）

（1）西方高等数学的引入。

鸦片战争使帝国主义凭借“坚船利炮”轰开了我国长期关闭的大门。从此，中国沦为半封建半殖民地的社会。列强的入侵和影响，加速了我国社会内部孕育着的城乡商品经济的发展。这使我国内部有了了解西方科学技术的愿望及其存在的社会基础。帝国主义同我国腐败政府签订的一系列不平等条约，使它们在我国取得了各种特权。在西方高等数学已经定型、成熟并成为解决实际问题有力工具的情况下，随着帝国主义在我国开设商埠、开采矿藏、设立工厂和学校等侵略活动的同时，形成西方科学第二次

引入我国的浪潮（第一次浪潮是明清之际）。在这一浪潮中，基本定型之高等数学首次由李善兰、华蘅芳等介绍到我国。

李善兰（1811—1882），浙江海宁人，自幼对数学有浓厚兴趣。他10岁学习《九章算术》，15岁学习《几何原本》（前6卷）。他的数学著作《则古昔斋算学》（1867）计13种共24卷，其中《方圆阐幽》、《弧矢启秘》和《对数探源》是他关于幂级数展开式的研究，他创造的“尖锥术”已有积分思想。李善兰于1852年在上海结识了1847年来华的英人伟烈亚力，二人合作，历时四年翻译出巴罗的《几何原本》（1660，后9卷）的英译本，于1857年刊刻。接着二人合作，又译出德摩根的《代数学》（1835）和美国罗密士的《解析几何和微积分》（1850），二书于1859年刊刻。以前，代数学在我国一直用它的音译名（如“阿尔热巴拉”等），李善兰根据其特点定名为代数学。罗密士的书，李善兰定名为《代微积拾级》，这是引入我国第一部高等数学著作，其中变数、函数、微分、积分、无穷、极大、极小、曲率等名词是李善兰首次制定的。此外，李善兰还同别人合作翻译了《重学》（即力学，1859）、《谈天》（即天文学，1859）等。李善兰不仅是我国现代数学的先驱，而且也是我国现代科学的先驱。

华蘅芳（1833—1902），江苏无锡人，一代有声望的学者，一生主要从事教育工作，先后担任上海格致书院和天津武备学堂的教习，武昌两湖书院的主讲，常州龙城书院和江阴南菁书院的院长等职。他学问渊博，涉及数、理、化、工、医、地及音乐各个方面。他还是一位翻译家，在数学方面，他同教士傅兰雅合译了《代数术》、《微积溯源》、《决疑数学》等七种共96卷，著有数学著作《行素轩算稿》。他是我国现代数学先驱之一。

在《代微积拾级》传入我国之前，于17、18世纪之交，法国曾赠送我国一批图书，其中有托里拆利的微积分知识；18世纪中期，在俄国彼得堡科学院赠送给我国的图书中有欧拉的微积分著作；1845年，俄国又赠送了一部柯西《微分学》的俄文译本。这些书或是藏在教会的书库中，或是压在皇宫里，未被重视。联系到李善兰的著作中已有积分思想，微积分这时被翻译出来并非偶然。

（2）中国现代数学教育的酝酿。

明清之际，作为西方科学载体的教士来华，客观上对我国科学的发展

起了某种程度的启蒙和促进作用。但是在当时，教士的影响仅限于上层社会的少数知识界。1840年以后，情况大变，洋人在华畅行无阻，教士几乎遍布全国。他们在广州、上海、福州、天津等大城市，先后设立教会学校。我国最早的教会学校是美国教士布朗于1839年在广州设立的小学。我国近代改良主义者、第一个留学生（1847年赴美）容闳曾经就读于此。据统计，到1877年，全国由教会办的小学共计350所。教会学校的课程除《教会三字经》、《福音史记课本》一类宗教用书外，还有算学、语文课。

19世纪下半期开始，美英殖民主义在我国许多大中城市设立文会馆、学堂和书院，并逐步合并，发展成教会大学。其中比较著名的有：山东登州文会馆（1864）和青州广德书院（1866）合并成齐鲁大学（1917）；南京的汇文书院（1879）以后发展成金陵大学；上海的培雅各学堂（1865）和广恩学堂（1866）合并为圣约翰书院（1879），又发展为圣约翰大学（1894）；上海的中西书院（1881）和苏州的中西书院（1897）合并成东吴大学（1901）；广州的格致书院（1885）发展为岭南大学；北京文汇书院（1988）和通县的潞河书院（1893）合并成燕京大学（1919）等。这些书院和大学中的课程大都有现在的代数、平面三角学和解析几何学。

我国自办的高等学校则以1862年创办的北京同文馆为最早。1863年，又在上海、广州设立类似学校。北京同文馆起初是培养翻译人才的学校，先后设立英、法、俄、德、日等文馆。1866年始设算学馆（相当于数学系）。1866年，聘请李善兰为算学馆的总教习。1869年，又请美国教士丁韪良为同文馆的总教习，副总教习为懂得数学的英国教士欧礼斐。课程有代数、《几何原本》、平面和球面三角、微积分、航海测量和天文测量等。

鸦片战争以后，清政府有识之士，纷纷寻求富国强兵之良策。60年代兴起的洋务教育除翻译西书、派留学生外，也注意办学校、发展科学的重要性。洋务派也重视数学。比如1871年，浙闽总督英桂和船政大臣沈葆桢一起上书同治说："水师之强弱，以炮船为宗；炮船之巧拙，以算学为本。"洋务派奉行"中学为体，西学为用"的教育方针，并在一些地方设立学堂，如马尾的船政学堂（1866）、天津的北洋水师学堂（1880）和武备学堂（1885）以及广东的陆军学堂（1885）等。

甲午（1894）之战以后，列强割地赔款，纷至沓来。朝野上下在思考对策时，都注意到了废科举、办学堂、兴科学是根本大计。在朝野一片呼

吁声中，1898年5月作为戊戌变法“新政”的重要措施之一，创办京师大学堂，任命孙家鼐为管学大臣，聘请丁韪良为总教习，并由梁启超起草《京师大学堂章程》。办学方针是“广育人才，讲求时务”。1900 年，因八国联军入侵而停办。1902年恢复并与同文馆合并。1910年设有经、法、文、格致、农、工、商七个学科。

1903年，清政府颁布“奏定学堂章程”(即“癸卯学制”)。“章程”规定大学堂4年，其中数学课有微积分、几何学、代数学、方程论、整数论等，一般采用外文课本。1905年清政府下令废除科举制度。辛亥革命后的第二年即1912年，又颁布了“学制修正方案”。“方案”规定数学为全体学生必学的课目之一。但是在辛亥革命前后，我国政局混乱，实际是空喊。真正学习西算的时间是“五四”以后。

1912年，留学德国的蔡元培回国，任南京临时政府的教育总长，提出了新的教育方针：反对忠君、尊孔、读经，确立了许多资产阶级民主主义的教育原则。不久，因蔡不满袁世凯的专制而赴德访问。就在1912年，京师大学堂改名北京大学。这是我国自办的第一所现代意义下的大学。早期的北京大学分文、理、法三科（相当今之学院），每科下设门，数学门的主要课程有近世代数、高等解析、近世几何、应用数学、数学教授法等，在当时是相当齐全的。1917年，蔡元培任北大校长。1919年，他将文理两科的14个专业改成14个系，为了强调数学的重要性列数学为第一系。这是我国第一个培养数学人才的基地。

我国要发展数学，除了在国内兴办现代教育、建立培养人才的基地之外，还必须走出去，直接学习国外先进的数学知识。这是追赶世界先进水平的一条捷径。

辛亥革命前夕，我国一批有志青年知识分子，为了追赶世界科学水平，他们发奋自强，通过了留美官费生考试。所谓“官费”就是美国把“庚子赔款”用作中国留美学生的费用。1910年的初秋，胡明复（1891—1927）、赵元任（1892—1982）、胡适（1891—1962）等十来个人一起，远涉重洋，来到了美国康奈尔大学。胡明复历时4年，以优异的成绩取得该校文学学士学位后，又入哈佛大学研究院专攻数学。两年后即1916年写出博士论文《平直微积分方程论》，通过答辩取得该校哲学博士学位。胡明复是我国第一个在国外取得数学博士学位的人。他的论文于1918年刊载

于《美国数学会学报》。

（3）回顾与比较。

从1840到1919的80年内，虽然西方高等数学已经引入我国，我国也有了一套现代教育体系和个别现代意义下的大学数学系，也有人在国外取得数学博士学位等，但是我国数学在世界上仍十分落后。李善兰所创的尖锥术虽有积分思想，但这仅相当西方17世纪初期的积分思想。《代微积拾级》与《微积溯源》仅相当于西方18世纪末的微积分。胡明复的博士论文虽有一定水平，但还不能同以彭加勒为代表的巴黎学派和以希尔伯特为代表的哥廷根学派的数学水平相比，同1900年希尔伯特的23个数学问题更不能同日而语。

我国数学同近邻日本相比情况又如何呢？

中日两国在19世纪上半期以前，都实行闭关锁国政策，以后又都是慑服于帝国主义的炮舰而打开长期禁锢的大门。中国19世纪60年代兴起的洋务运动和日本的明治维新（1868～1873）时间大致相同，都注意到学习西方。但是，我们的行动迟缓，请看下表：

	开始学习西算	成立第一所大学	成立研究机构	成立数学会
日本	1873年	1877年	1879年	1877年
中国	1903年	1912年	1928年	1935年
中国晚于日本时间	26年	35年	49年	58年

人们估计，到“五四”时期，我国数学落后于日本约半个世纪。其实，我国接受西算的时间远远早于日本。《几何原本》、《代微积拾级》以及《代数学》等著作，都是我国学者首先翻译的。但是这些著作在我国并没有产生应有的影响，而60年代由中国传到日本，却影响很大。

19世纪末期和本世纪初期，世界数学以法国和德国为轴心。但是在“五四”以前，我国几乎没有派往法、德的留学生。不过熊庆来回忆往事时曾经提到一件事：1920年，法国著名数学家波雷尔访华时，曾经问及他在巴黎高等师范学校学习期间（1889—1893）有一位名叫康宁的中国同学，说他思维敏捷，学习极好，是很有发展前途的数学人才。可惜此人回国后没有得到重视，为求生计，在京汉铁路上当了一名小职员。对比日

本，情况不同。日本的高木贞治于1898年（晚于康宁去法时间）去哥廷根，跟希尔伯特研究代数数论，以后又解决了希尔伯特的第9个问题，引起世界数学界的重视，使日本数学跻身于世界先进行列。

2.中国现代数学的起步（1919～1949）

（1）中国现代数学教育体制的形成。

“五四”之前，教会在我国办了一些学校，客观上对我国教育的发展有某些促进。但是外国人在我国办教育的根本目的，不是为我国培养人才，而是企图培植他们的势力，实行文化侵略。例如：1911年，清政府利用美国“退还”的庚子赔款办了一个清华学校（即留美预备学校，这是清华大学的前身）。该校名义上归中国外交部管理，实际上大权在美国公使手中。1911年，胡敦复（1886—1979）任该校教务长时，主张让学生多读理工课程，但是美国教员则主张多读英文和美国文学史。两种意见争执不下。美国公使则把此事通报给中国外交部，对胡施加压力，终以胡被迫辞职了结。诸如类似事件，使中国知识分子懂得了自己办学、办科学的必要性和重要性。

辛亥革命虽然成功，但是并没有结束帝国主义欺侮中国的历史，也没有完全清除封建势力。于是在1919年，中国大地兴起了伟大的五四运动。这是以知识分子为先导的反帝反封建的爱国民主运动；是把“德（democracy）、赛（Science）”两先生请到中国来的新文化运动，堪称中国的“文艺复兴”运动。在这场运动中，中国现代科学教育的思想得到确立。作为这一思想重要体现之一的是一批现代意义的大学先后建立。比如今之复旦大学（1917）、南开大学（1920）、南京大学（1921）、武汉大学（1923）、北京师范大学（1923）、中山大学（1924）、清华大学（1926）、浙江大学（1927）等。据统计，到1933年，我国设有数学系或数理系的大学共33所，到1948年又增加到53所。

在这些大学中，清华大学、浙江大学、北京大学、南开大学和中央大学（即今之南京大学）的数学系比较著名。1930年以后，又相继在这五个数学系设立数学研究所。各大学的数学系和数学研究所是我国培养数学人才的基地和我国数学家的摇篮。

但是20年代的旧中国，要办数学教育是非常困难的：既缺乏合格的师资，又无必要的经费。在各种困难的条件下，姜立夫、熊庆来等前辈们呕

心沥血、惨淡经营，为我国现代数学教育事业奠定了基础，为数学研究播下了火种。

姜立夫（1890—1978），浙江平阳县人，1911年赴美留学，1915年毕业于加州大学，1919年获美国哈佛大学博士学位。同年回国任南开大学教授，创办南开大学数学系。他根据数学系的需要，先后讲授空间解析几何、微积分、射影几何、复变函数论、高等代数、n维几何、微分几何以及非欧几何学课程。他本人专长几何学。由于他的勤奋、多能、认真，保证了教学质量。他基本上凭自己一个人的力量办起了一个数学系；人们赞叹那时的南开数学系是一人系。现在著名的数学家如陈省身、江泽涵、吴大任、申又枨、孙本旺等都曾经受教于他。

熊庆来（1893—1969），是云南弥勒县人。他的一生，曾先后三次赴法求学、研究，获得理学博士学位。1921年被聘为东南大学（今之南京大学）教授，并创办该校数学系。1926年任清华大学算学系主任。1930年，在清华又办起了我国第一个数学研究所。在他主持和指导下的研究生先后有陈省身、吴大任、庄圻泰、许宝騄、段学复、柯召、田方增、赵访熊、杨宗磐等数十位。1937年他担任云南大学校长，把该校办得很有名气。熊庆来主要从事亚纯函数方面的研究，一生共发表创造性的论文50多篇，他的《关于亚纯函数及代数体函数，奈望林纳的一个定理的推广》一书，被收入国际著名丛书《数学科学纪念文集》。

我国数学界曾经广为流传这样一段佳话：华罗庚在青年时代家境清寒，在一家小杂货店当伙计。1930年，他在《科学》杂志上发表题为《苏家驹之代数的五次方程解法不能成立的理由》的文章。该文被杨武之（杨振宁之父，1928年在芝加哥获博士学位，曾任清华大学、西南联大、复旦大学教授）发现，认为作者有一定的数学功力，就把该文推荐给当时清华大学理学院院长、数学系主任熊庆来。熊求才若渴，四处打听，终于把华罗庚调入清华大学，为他安排工作。熊庆来求才、惜才、爱才，是他为我国数学事业不遗余力的一个侧面。

给我国数学发展作出重要贡献的还有吴在渊（1884—1935）、郑之蕃（1887—1963）、魏嗣銮（1895—？）、冯祖荀（1898—1962）、何鲁（1894—1973）、陈荩民（1895—1981）、傅种孙（1898—1962）、陈建功（1893—1970）等。为我国数学史的研究奠定基础的有李俨（1892—

1963）、钱宝琮（1892—1974）等。

在五四以后的十多年中，主要是我国现代数学教育体制的形成阶段，经过先辈们的努力，已经形成一批从事数学教育和研究的队伍。在这样的背景下，中国数学会应时而生。

中国数学会的发起者是熊庆来、胡敦复、朱公槿、顾澄等人。1935年7月25日，代表全国数百名数学工作者的33名代表在上海举行中国数学会成立大会。学会选出董事9人，理事11人，评议21人。由冯祖荀、熊庆来等提议，决定办两种刊物：一为普及性的《数学杂志》，一为学术性的《数学学报》。后者除中文版外，还可用英、法、德、意文发表。《数学杂志》由顾澄任总编辑；《数学学报》由苏步青任总编辑，华罗庚任助理编辑。会上根据熊庆来的提议，决定加入国际数学会和国际数学教育委员会，决定开展中外交流，首先是邀请外国学者来华讲学。1935年前后来华讲学的有伯克霍夫、奥斯古德、维纳以及阿达玛等。

中国数学会的成立，是我国现代数学教育体制基本定型的标志，也是我国数学工作者积极主动追赶世界数学水平的新起点。从此，中国数学发展的步伐有所加快。经过一年的工作，数学会的两个刊物于1936年8月先后出版，并于这一年的夏季在北京举行了第二届数学年会。在这次会议上，论文的数量和质量都超过第一次大会。

（2）中国现代数学的若干成就。

从1919年五四运动到1949年新中国诞生的30年，中华大地经过军阀混战、抗日战争以及数次国内革命战争，中国的科学受到严重的影响。一些有志青年，纷纷到海外求学，回国后又在艰难的环境中奋进。这批人是我国现代数学的奠基者。

从20年代末期起约10年之内，我国数学家已经完成一批有一定国际水平的数学论文。1928年，陈建功在日本发表了《富里哀级数绝对收敛之函数类》一文，独立地得到了同英国著名数学家哈代和利特伍德相同的结果，完成的时间大致相同，这是中国数学进入国际水平的先声。1933年，曾炯之在哥廷根完成的博士论文，是中国数学家在抽象代数领域中的杰出成就，其中有所谓的“曾定理”已写入抽象代数的教科书中。同年，熊庆来在法国写出《关于整函数与无穷级数的亚纯函数》一文，被西方誉为熊氏无穷级数理论，熊庆来因此文而获得法国科学院理科博士学位。据说，

美国著名数学家维纳于1936年去挪威奥斯陆参加国际数学家大会的途中曾经对日本数学家说："中国在数学上已经赶上日本了。"不管这种估计的准确性如何，中国现代数学已经起步，且很有起色。

40年代是我国抗日战争的艰苦年代和国民党的统治最黑暗的年代，我国对外交流几乎完全中断。尽管如此，我国数学家华罗庚、许宝騄等人仍然取得举世瞩目的成就。

华罗庚（1910—1985），江苏金坛县人，在40年代解决了高斯完整三角和的估计这一历史难题，得到了最佳误差阶估计。他对哈代与利特伍德关于华林问题及赖特关于塔里问题的结果作出重大改进，至今仍是最佳纪录。他在这时期完成的专著《堆垒素数论》是本世纪经典数论著作之一，先后被译成俄、匈、日、德、英文出版。

许宝騄（1910—1970），是中国早期从事概率和数理统计研究并达到世界先进水平的杰出学者。比如：他发展了矩阵变换的技巧，推导样本协方差矩阵的分布与某些行列式方程的根的分布，推进了矩阵论在代数中的应用。他对高斯-马尔科夫模型中方差的最优估计的研究是后来关于方差分量和方差的最佳二次估计的众多研究的起点。他揭示了线性假设的似然比检验的第一个优良性质。他得到了样本方差的分布的渐近展开以及中心极限定理中误差大小阶的精确估计。他同H.罗宾斯合作提出的"完全收敛"则是强大数律的有趣加强，是后来一系列有关强收敛速度的研究的起点。他的著作有《许宝騄文集》（1981）、《抽样论》（1982）、《许宝騄论文选集》（1983，美国纽约，英文版）。

40年代，我国数学家主要从事经典性的数学研究，除华罗庚和许宝騄的成就外，在数学各个领域均取得卓越的成就，例如：陈建功、王福春在三角级数方面，苏步青、白正国在射影微分几何方面，段学复、王湘浩、李宗华在代数方面，柯召在不定方程和二次型方面，李国平、庄圻泰在函数分布理论方面，吴大任、严志达在积分几何和李群方面，闵嗣鹤在数论方面，徐利治在数值积分方面，江泽涵、吴文俊在拓扑方面等。

从1991到1949的30年，如果说前15年是我国现代数学教育体制的形成阶段，那么后15年可以说是我国现代数学的起步阶段。

值得指出，陈省身从1946年到1949年在中央研究院数学研究所的工作对我国数学的发展产生了重要的影响。

陈省身于1946年从美国回国，代替他的老师姜立夫主持数学研究所的工作（当时所长是姜立夫兼任）。他曾设想了一个追赶世界先进水平的研究计划，即选择当时正在蓬勃发展的代数拓扑为主要研究方向，集中力量突破，取得世界公认的地位；然后再以此为基础拉开研究面，逐步攀登数学各个高峰。在当时的研究所，陈省身是唯一的授课导师，每周讲12个小时的拓扑学。当时在所里的年青人有吴文俊、孙以丰、周毓麟、路见可、叶彦谦、朱德祥、张素诚、陈德璜等，共约20位。由于局势的变化，他的设想没有实现。但是这一段工作却给我国数学的发展产生了重要影响：当时的年青人，后来几乎都成为我国数学界的骨干力量；有的人正是沿着这条道路取得重大成就。陈省身的设想，同第一次世界大战以来波兰数学发展的道路堪称异曲同工。

（3）回顾与比较。

第一次世界大战后的一段时间，是哥廷根学派的黄金时期。20年代初期，魏嗣銮、朱公槿先后来到哥廷根跟随柯朗学习分析学。1926年，曾炯之来到哥廷根跟随女数学家E·诺特学习代数。此外还有杨武之等人也跟诺特学习代数。他们学成回国，一般在大学任教，注意力集中于数学教育。应当说比之当年康宁的情况好多了。但是不久抗日战争爆发，迫使他们颠沛流离，无法从事研究。曹炯之辗转来到当时西康省西昌的一所技术学校以教书为生，因生活艰难，于1943年过早病逝，未能来得及为中国的数学事业作出应有的贡献。有人叹息说，如果他能同苏步青（几何学）和陈建功（分析学）一起协同工作，将对我国代数学的发展有很大的促进作用。同曾炯之的情况类似的还有王福春等。王福春在抗战期间随浙江大学辗转千里，来到贵州，患了重病，但仍坚持研究黎曼s函数，虽经数学家联名呼吁政府抢救，但无下文，于1945年客死于贵州。战火纷乱，而政府又不注意保护，使我国损失了一批极有才华的科学家。对比日本，情况就不一样。日本的正田建次朗于1927年，末纲恕一于1928年，先后来到哥廷根向E·诺特学习代数学。他们学成回国，生活安定，继续从事研究，传播、开拓了E·诺特抽象代数思想，逐渐形成了日本的代数学派，为日本数学进入世界先进行列作出了贡献。时局动荡，政府不重视人才，不为科学家提供必要的研究条件，是我国现代数学发展速度低于日本的重要原因。

抗日战争虽然胜利，但是40年代末期却是国民党王朝统治最黑暗的时

期，也是中国科学和教育事业濒于消亡的时期。第一，从事数学工作的人数极少，旧大学的数学系，往往只有一、二个教员和三、五个学生。1948年，堂堂的中央研究院的数学所，只有三个研究员，图书仅三千余册。第二，旧大学数学系的教育没有明确的目标：低年级为了凑足教学时数，设有国语、英语、化学、物理、力学、通史等课程，看不出培养目标；而高年级又"因人设课"，放任自流；没有统一教材，随教员兴趣选用不同国家的教材，甚至在同一个数学系，同时使用日本的代数教材、美国的几何学教材和法国的分析教材的现象。学生学的东西无用，而有用的东西又不学，使数学同中国实际相脱离，缩小了数学的阵地。由于毕业等于失业，学生也无心学习。第三，没有统一的研究规划，研究者凭自己的兴趣，孤军盲目奋斗，效果不佳。第四，中国现代数学从根本上讲，是从国外引进的，因此国外一些数学思想也被毫无分析地引了进来。比如，彭加勒关于几何"约定论"观点很有市场；对罗素关于数学的定义，既有简单接受者，也有望文生意、一知半解者，败坏了数学的声誉。数学观的混乱，在新中国诞生以后才有根本转变。

3.中国现代数学的发展（1949年以来）

（1）前30年的发展简况。

中华人民共和国的诞生，为中国数千年的文明史揭开新的一页，中国科学开始复苏，生机勃勃。

北京刚一解放，于1949年7月，在北京召开了自然科学工作者代表筹备会，与会的数学界代表协商重建中国数学会问题。经过一段时间的筹备，于1951年8月在北京召开了新中国成立后第一次数学会代表大会，出席代表78人。会上讨论并通过数学会的会章、任务和工作计划，选出了21位理事，推举华罗庚、江泽涵、陈建功、曾昭安、吴大任、傅种孙、关肇直、段学复、王寿仁九人为常务理事。

解放前，《数学学报》和《数学杂志》只出版两卷就停刊了。新中国诞生后，两刊先后于1951与1952年复刊，后又将《数学杂志》改为《数学通报》，性质未变。《数学学报》由华罗庚任总编辑，陈建功、申又枨负责分析学，段学复、张禾瑞负责代数学，苏步青、江泽涵负责几何学，赵访熊、周培源负责应用数学，关肇直负责数学基础，许宝騄负责统计数学，李俨负责数学史。《数学杂志》由华罗庚和傅种孙任总编辑。1955年又创办《数

学进展》。

50年代，中国数学界同当时的苏联和波兰等东欧国家来往频繁。凡这些国家的数学会议或某一分支的学术会议，必然邀请中国参加，这对强烈希望缩短同世界数学水平差距的中国数学界来说收益匪浅。中国也派遣了大批留学生和进修人员去这些国家（主要是苏联）。另一方面，我国也经常邀请这些国家特别是苏联专家来华讲学，协助制订数学发展规划，明确发展目标。1956年，中国数学会召开了一次论文宣读大会。参加大会的除苏步青、华罗庚、傅种孙等老一辈外，大部分是初入数学界的后起之秀。例如：数论方面有王元、陈景润等，代数方面有丁石孙、万哲先等，微分几何方面有谷超豪等，函数论方面有夏道行等。论文作者也不再限于以往的京、津、沪、杭、宁，而几乎遍于全国各大城市。

特别应当提出的是，我国老一辈数学家差不多都经历过异国他乡的求学生活，他们深知，如果没有一个独立自由的祖国，中国现代数学不可能取得全面的发展，只能是从其它国家的书本上剪下来残缺不全的枝叶。解放了，他们珍惜这个来之不易的时代。他们从战略目标考虑，把自己的工作重点转移到为国家培养人才方面。与此同时，在当时条件并不很好的情况下积极开展研究，使我国数学得到进一步发展。例如华罗庚在解析函数论和多复变函数论方面，吴文俊在示性类和示嵌类方面，苏步青在一般空间上的微分几何方面，陈建功在直交函数论和单叶函数论方面等，都有新的成就。在80年代之前，50年代是我国数学发展最好的时期。

"大跃进"的1958年，是我国失去理性的一年。数学家本来同"形势"较远，但长期在空话、大话氛围中也受到一些影响。积极的一面是对我国数学界明确提出了向世界先进水平看齐的奋斗目标，重视理论联系实际，加强了一些薄弱领域，也填补了一些空白。例如，从那时起，计算数学、概率统计、泛涵分析等正式列入数学系的必修课，保持至今。线性规划得到大力推广，产生了既有理论根据、又切实可行的图上作业法，运筹学从此在我国发展起来。另一方面，"大跃进"所表现的主观意志论和"浮夸风"在数学中也有反映，主要是要求过急、偏高。过分强调理论联系实际的结果，也产生忽视数学基础教育的倾向，实际是揠苗助长。

尽管如此，人民共和国最初的十年，是我国数学蓬勃发展的十年。据统计：解放前的旧中国发表数学论文的作者共计只有74人，而解放后的十

年则有324名作者；解放前的几十年中发表的论文（含在国外发表的）共计652篇。但解放后的十年，仅在国内发表的共983篇，其中还不包括李俨、钱宝琮和严敦杰（1917—1988）等大量数学史方面的论文。短短十年能有这样的成就实在不易。如果能保持这样的发展势头，中国现在的数学将是另一个样子。

可惜好景不长。1966年开始的十年之久的文化大革命是对中国科学事业的一场浩劫。稍有成就的科学家几乎都受到不同程度的批判，有的被打入专政队，关进牛棚；不少有才能的科学家死于非命。大学长期瘫痪，有的停办。大批知识分子被送到"干校"去"自食其力"。在那样的年月，从事科学研究被认为是脱离实际，是搞修正主义，学问越多越反动。在这种困难的条件下，年青的数学家陈景润把数论中哥德巴赫猜想（"1＋1"）的研究推进到一个新的阶段：完成了"1＋2"的证明。

（2）80年代的发展简况。

"野火烧不尽，春风吹又生"。十年动乱一结束，中央在全国立即进行了一系列拨乱反正的工作。经过短短两年的努力，中国数学会于1978年11月在成都召开第三次代表大会（第二次在1960年召开）。这次大会是对动乱年月的告别，标志中国数学开始了新的征程。

1978年以来，"对内搞活，对外开放"的方针，对我国数学的发展产生了深刻影响。有人统计，仅从1978到1983的五年内，全国先后召开各种学术会议60余次（不包括各地组织的各种学术活动），提交论文共计四千余篇①，学术活动空前活跃。从1978年开始，我国又进行硕士、博士的培养和授予学位工作，加上出国留学和访问学者相继回国，十年动乱所造成的青黄不接的局面已开始扭转。

80年代也是我国同国际学术交往空前频繁的年代。"走出去"和"请进来"的学者之多已无法统计。经过努力，中国数学会（含中国台北数学会）已于1986年正式加入国际数学家联盟，并派代表参加了1986年（美国伯克利）和1990年（日本京都）两届国际数学家大会。

适应数学发展的需要，80年代，国内数学期刊空前增多，计有：《数学

---

① 参见张奠宙、许滇：《中国现代数学史话》，广西教育出版社1987年版，第94页。

学报》（中、英文版）、《应用数学学报》（中、英文版）、《数学进展》、《数学实践与认识》、《运筹学杂志》、《应用概率统计》等十余种。

更可喜的是，80年代，我国一批更为年青的数学工作者崭露头角。他们富于朝气，敢于碰硬、碰难，勤于钻研；他们有名师的指导，目标明确，眼界开阔，比之先辈又有得天独厚的条件——能经常有机会在国际数学发展主流的风口浪尖上搏击，这些人是我国现在一支攀登数学高峰的突击队。80年代以来的历届国际奥林匹克数学竞赛，我国选手所取得的优异成绩表明，中国数学后继有人，潜力极大。

前面曾说，五四时期，我国数学落后于日本约半个世纪，同世界数学水平的差距自然不少于半个世纪。自20年代以来，世界数学突飞猛进，因此，要追赶世界水平就不能一蹴而就。我国现在已经涌出一批杰出人才。但是也应看到目前同世界先进水平仍有差距。下面列举几件事实。

沃尔夫数学奖是授予世界上负有盛名的数学家的，自1978年评奖以来，获奖者共20多位，至今与我国数学家无缘。

菲尔茨奖是专门授予在数学中作出突出贡献的年轻人的（40岁以下），自1936年开始评奖，每四年一次，到1990年获奖者共34人，其中有一位丘成桐，他虽出生于我国广东汕头，但自幼在香港上学，1969年被陈省身破格录取为研究生而赴美，他的成就是在美国作出的。至今我国青年数学家与该奖也无缘。

每四年一届的国际数学家大会，均邀请当时最活跃的数学领域中最有权威的数学家作报告：每届1小时的大报告16个，45分钟的报告140多个。仅最近三届（1982、1986、1990）合计1小时报告近50个，45分钟报告约420多个。但是我国数学家至今无一人被邀作一小时的学术报告。虽然这事常受非学术因素的影响，但也不能否认我国数学同世界先进水平尚有差距这一事实。

80年代，世界公认的数学强国是美、苏、法、英、日、德。我国数学不仅不能同这六国相比，甚至在若干重要领域还落于印度和巴西。根据1985年的统计，我国数学家的论文被国际数学文摘杂志摘录两篇以上的作者共400人左右，而美国却有4000人之多，是我国的十倍。

1980年前后，我国一位数学家估计说，我国数学同体育相似，虽然个别

项目称得上强项，能拿到冠军，但总体实力落后。十年过去了，我国体育发展很快，称得上是亚洲强国。但是数学要走向世界还有一段距离。当然数学和体育不同，不能简单类比。不过还是可以思考一下，体育能迅速发展，为什么数学不能？

4.艰辛治学、为国争光的中国数学家

新中国刚成立不久，于1949年11月成立了中国科学院。1955年选出第一批学部委员（相当于国外的院士），其中数学界有王湘浩、华罗庚、江泽涵、许宝騄、吴文俊、李国平、苏步青、陈建功、柯召、段学复，共10位。李俨被选为哲学社会科学部学部委员。1980年增选了王元、冯康、关肇直、谷超豪、杨乐、陆启铿、陈景润、胡世华、姜伯驹、夏道行、程民德，共11位。1991年第三次又选出丁夏畦、万哲先、王梓坤、石钟慈、张恭庆、周毓麟、胡和生（女）、郭仲衡、廖山涛、潘承洞，共10位。

以上共32位。他们是五四以来我国在不同时期数学研究的“国家队”，他们的成就是我国数学水平的主要代表。

艰辛治学、为国争光，是我国数学界的光荣传统。正是经过以他们为代表的几代人的工作，中国数学才有今天的面貌。他们热爱国家民族和为数学的奉献精神可钦可佩！

下面介绍一下苏步青和华罗庚的工作片断以及陈省身对我国数学事业的贡献。

苏步青（1902——），浙江平阳县人，他是我国德高望重的数学家和数学教育家。1919年，年仅17岁的苏步青赴日本，考入东京高等工业学校，1924年入帝国大学数学系，因成绩极优，被该校教授会破例推荐直接做研究生。1931年获博士学位。同年，他谢绝该校的聘请回国任浙江大学教授兼数学系主任。1952年全国院系调整时去复旦大学。在浙大和复旦，他同陈建功一起创办数学研究所，这个研究所一直是我国培养数学人才的重要基地之一。以他为核心，在我国已形成了一支具有特色的微分几何群体。他的许多学生已成为我国数学界的骨干力量。

苏步青是我国微分几何的代表。他先后共发表学术论文168篇，分别刊载于中、日、英、美、德、意等国家的数学专刊。他的著作有《苏步青论文选》（1983）、《射影曲线概论》（有英译本）、《射影曲面概论》、《一般空间微分几何》、《计算几何》（有英译本）、《微分几何五讲》、

《射影共轭网理论》和《仿射微分几何》等。

华罗庚靠自学成才，被誉为“中国数坛的巨星”。

华罗庚被熊庆来等发现并调入清华大学后，他如鱼得水。不到一年，听完数学系主要课程；不到两年，他的业务实力使清华大学破格提升他为教师。30年代中期研究华林问题显示了他的数学能力。1935年，著名数学家维纳来华讲学，发现华罗庚的才华，把他介绍给当时负有盛名的英国数学家哈代。1936年华罗庚访英，在英两年共发表论文十多篇。1938年，在抗日战争的烽火年代，他回国任西南联大教授。短短数年，又写出论文20多篇和一本专著《堆垒素数论》。1946年，受聘来到普林斯顿高等研究所，并先后任美国几所大学的教授。1950年回国任中国科学院副院长兼数学研究所所长等职。此后又写出论文约260篇，出版专著有《数论导引》、《典型群》、《多个复变典型域上的调合分析》等十余部（有的著作同别人合作）。现代数学中有许多定理、引理、不等式、算子和方法是以他的名字命名的。1983年，德国斯普林格出版社出版了《华罗庚选集》。华罗庚的研究横跨代数、分析、几何各个领域，是本世纪少数出色数学家之一。

美国普林斯顿高等研究所的赛尔伯格（1950年菲尔茨奖获得者）曾对华罗庚的回国评论说：“如果华罗庚一直留在美国的话，他本来会对数学作出更大的贡献，当然他回国对中国数学也是十分重要的。很难想象，如果他不回国，中国数学会怎样。”①这种认识不无道理，也有一定的代表性。华罗庚在他的个人事业和祖国数学事业的天平向那一方倾斜的关键时刻，作出回国的抉择，反映了他的爱国热忱，也是我国广大数学家报效祖国的写照。

陈省身1911年出生于浙江省嘉兴县，1926年入南开大学数学系，1930年毕业后在清华大学当助教和研究生。1934年赴德跟当时的几何学家布拉希克学习几何学。1936年又赴法跟E·嘉当深造微分几何。1937年回国任教于清华、北大和西南联大。1943年应邀赴美，在普林斯顿高等研究所工作。1946年回国代替他的老师姜立夫主持中央研究院数学研究所的工作。他的研究范围既广、又深，被称为“现在还健在的最伟大的几何学家”，获得1983年沃尔夫奖，在国际数学家大会上作过多次一小时的大会报告。

新中国成立之后，特别是最近十几年，陈省身经常回国讲学，关心国内

① 转引自张奠宙、许慎：《中国现代数学史话》，第74页。

数学的发展。他认为炎黄子孙有搞数学的天赋。1985年，他给我国《数学教学》杂志题词："21世纪的数学大国"，代表了他的观点和期望。为此，他亲自给学生作了题为《怎样学习和研究数学》的报告，要求学生一要用功，二要有良师益友，三要有广博的知识。特别是用功，每天至少集中精力思考七、八个小时的数学。他劝那些想过舒服日子的人最好别选择数学专业。

他认为要发展数学，必须了解世界数学发展趋势，所以要交流，要派留学生；但是不能长期依赖外国给我们培养人才，必须建立自己培养人才的基地。1982年，他捐款给南开大学数学系，设立姜立夫奖学金，鼓励有数学才华和志愿的青年学生。1985年，他又在南开大学创办南开数学研究所，并自任所长，办所方针是，"立足南开，面向全国，着眼世界"。该所每年围绕一个数学重点方向，聘请数位国际上一流数学家作系统讲学。学员是从全国各地选拔的研究生和青年教师，听课后讨论。他曾建议，我国数学界应每年举行三大项活动："国际微分几何和微分方程会议"，"暑期数学研究生教学中心"，派20名研究生赴美参加"陈省身项目"的研读。中国数学会前任理事长吴文俊称陈省身是"中国数学界青年学子的总教练"。

外籍华裔学者，虽然身居海外，但却魂系中华，陈省身就是其中之一位。陈省身（也是我们）所期望的"21世纪的数学大国"，现在已有一定的基础，在我国新的一代和海内外数学界老前辈的共同努力下，这一目标一定能够实现。

回顾我国数学发展历史，15世纪之前的中国古典数学，曾处于世界先进行列。从16世纪起，开始同西方差距拉大，19世纪差距达到极大值。从20世纪起开始追赶，特别是最近半个世纪的追赶，我们已经越过低谷，使差距逐渐缩小。如果按现在的情况追赶下去，21世纪的中国数学，必将进入世界先进的行列。

外国人名译名对照

（以汉译名第一个字的汉语拼音字母为序）

A

阿贝尔（N.H.Abel,1802—1829）
阿波罗尼（Apollonius,约B.C.262—约B.C.190）
阿达马（J.—S. Hadamard,1865—1963）
阿基米德（Archimedes,约B.C. 287—B.C.212）
阿廷（E.Artin,1898—1962）
阿干德（J.R.Argand,1768—1822）
阿基塔斯（Archytas,约B.C.428—B.C.347）
阿诺皮德斯（Aenopids,B.C.5世纪）
阿尔福斯（L.V. Ahlfors,1907— ）
阿格内西（M.G. Agnesi,1718—1799）
阿蒂亚（M.F.Atiyah,1929— ）
阿里斯塔克（Aristarchus,约B.C.310—B.C.230）
阿那克西米尼（Anaximems,约B.C.585—B.C.526）
阿那克西曼德（Anaximaudros,约B.C.610—B.C.546）
阿那克萨戈拉（Anaxagorsas,约B.C.500—B.C.428）
阿尔伯图（P.C. Alberto,1920— ）
阿尔诺（A. Arnauld,1612—1694）
阿尔特赛（M. Aldersey）
艾伦贝格（S. Eilenbenrg,1913— ）
艾丁（B. Eddin,16世纪前后）
艾里贡（P.He′rigone,17世纪）
艾森斯坦（F.G.M. Eisentein,1823—1852）
艾伦多弗（C.B. Allendoerfer）
艾德瓦（W.Edward,1951— ）
艾肯（H.Aiken,1900—1973）
爱因斯坦（A.Einstein,1879—1955）
爱尔特西（P.Erdös,1913— ）

F

M

普吕克 (J. Plücker, 1801—1868)

普罗克洛斯 (Proclus, 约410—485)

普特南 (H.Putnam,1926—)

普莱特 (J. Peletier, 1517—1582)

波格列洛夫 (Погрелб)

婆罗摩笈多 (Brahmagupta, 约598—约665)

婆什迦罗 (Bhāskara, 约1114—约1185)

佩拉 (F.Peyrard,1760—1822)

培利 (J. Perry, 1850—1920)

培根 (F. Bacon, 1561—1628)

培根 (R. Bacon,约1214—1294)

庞迪峨 (Didace de Pantoja, 1571—1618)

Q

契比谢夫 (П.Л.Чеьыщеб, 1821—1894)

丘奇 (A. Church, 1903—)

奇尔恩豪斯(E.W.V. Tschirnhnusen, 1651—1708)

齐宾 (Zippin)

丘凯 (N.Chuquet,1445—1500)

R

茹科夫斯 (H.E.Жукобский, 1847—1921)

若尔当 (C.Jordan,1838—1922)

S

塞尔 (J.P. Serre, 1926—)

赛雷特 (J.A. Serret, 1819—1885)

赛尔伯格 (A. Selberg, 1917—)

赛尔瓦 (J.Seruois)

色诺克拉底 (Xenokrates)

色诺芬尼(Xanophanes, B.C. 6世纪)

桑普森 (J.H.Sampson)

沙勒 (M.Chasles,1793—1880)

瑟斯顿 (W.P.Thurston,1946—)

施罗德(F.W.K.E. Schröder, 1841—1902)

施特纳(J.Steiner,1796—1863)

施泰尼茨 (E.Steinitz, 1871—1928)

施陶特 (K.G.C.Von Staudt, 1798—1867)

施瓦尔茨 (L. Schwartz, 1915—)

施瓦尔茨 (H.A.Schwarz,1843—1921)

施奈特 (Schneider)

施密特(E.Schmidt,1876-1959)

斯梅尔 (S. Smale, 1930—)

斯廷罗德(N.E. Steenrod,1910

T

W

韦德伯恩(J.H.M. Wedderburn, 1882—1948)
韦伊 (A.Weil, 1906—)
威赛尔(C.Wessel,1745—1818)
伟烈亚力 (A. Wylie, 1815—1887)
魏德曼 (J. Widman,1460—?)
沃赫 (F.R.J.Vaughan)
沃尔泰拉 (V.Volterra, 1860—1940)
沃尔夫 (C.Wolf, 1678—1754)
瓦利斯(J. Wallis,1616—1703)
乌拉姆 (S.M. Ulam, 1909—1984)

X

西尔维斯特 (J.J. Sylvester, 1814—1897)
西格尔 (C.L. Siegel, 1896—1981)
希波克拉底 (Hippocratas of Chios, B.C. 5世纪后半)
希尔伯特 (D. Hilbert, 1862—1943)
希帕恰斯 (Hipparchus, 约B.C.180—B.C.125)
希艾泰德斯 (Theatetus, 约B.C.415—B.C.369)
希洛 (Heron, 公元元年前后)
希思 (T.L.Heath,1861—1940)
谢瓦莱 (C.Chevalley, 1909—1984)
夏皮罗(I.Piatetski—Shpiro, 1929—)
小平邦彦(Kodaira Kunihiko, 1915—)
辛钦 (A.Я. Xuнzuн, 1894—1959)
辛普生 (T. Simpson, 1718—1761)

Y

雅可比 (C.G.J. Jacobi, 1804—1851)
雅卡尔 (J.H. Jacguard,1752—1834)
亚里士多德 (Aristotle, B.C. 384—B.C.322)
亚力山大罗夫 (A.Я. Aleкcaн-gpoб)
亚力山大罗夫(П.C. Alekcaн-gpoб, 1896—1982)
约翰 (W.M. John, 1931—)

Z

朱德因 (P.E.B. Jourdain)
扎德 (L.A. Zadeh)
扎里斯基(O.Zariski,1899—)
芝诺 (Zeno, B.C. 5世纪)
正田建次朗 (Shoda Kenjiro)